Sommaire

Notations 22

Introduction 24

I Introduction heuristique

1 Probabilités (heuristique) 31

2 Variable aléatoire (heuristique) 55

II Théorie et Pratique

3 Espaces probabilisé 77

4 Conditionnement 101

5 Indépendance (1/2) 111

6 Variables aléatoires discrètes 127

7 Espérance de v.a. discrètes 143

8 Couples de v.a. discrètes 173

9 Le jeu de *pile* ou *face* 203

10 Variables aléatoires à densité 223

11 Espérance d'une v.a. à densité 245

12 Couples de v.a. à densité 257

III Plus formellement...

13 Variables aléatoires (cas général) 291

14 L'espérance comme intégration... 307

15 Vecteurs aléatoires 331

16 Indépendance (2/2) 341

17 Fonctions caractéristiques 357

18 Vecteurs gaussiens (∗) 365

IV Théorèmes limites

19 Convergences 383

20 Loi des grands nombres 417

21 Le théorème limite central 437

22 Techniques d'approximations 447

23 Espérance conditionnelle 469

V Quelques applications

24 Résultats élégamment établis... 495

25 Simuler informatiquement une loi 509

26 Méthodes de Monte-Carlo 531

27 Arithmétique et probabilités 549

28 Bosons, fermions et boltzmannions 559

29 Processus de Poisson 573

30 Mouvements browniens 581

31 Estimation bayésienne 613

32 Loi de l'Arc sinus et séries aléatoires 617

33 À propos de quelques paradoxes 625

A Annexes

A Éléments d'analyse et d'algèbre 637

B Davantage sur la mesure 665

C Théorèmes d'existence 679

D Tables 685

E Lexique français-anglais 689

Table des matières

Introduction **24**

§ 1. Les lois du hasard 24
§ 2. But de la théorie 25
§ 3. Quelques mots sur l'ouvrage 26
§ 4. Rosencrantz et Guildenstern 27
Exercices 28

Partie I : Introduction heuristique **29**

1 Probabilités (heuristique) **31**

1.1 Le langage de l'aléatoire 31
§ 5. Phénomènes aléatoires 31
§ 6. L'univers Ω et les réalisations possibles du hasard 33
§ 7. Événements 35
§ 8. Compter/mesurer 35
§ 9. Langage ensembliste 37
§ 10. Calcul des probabilités 38
1.2 Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable 39
§ 11. Univers fini 39
§ 12. Probabilités sur un ensemble dénombrable 42
1.3 Probabilités sur $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^{\mathbb{N}^*}$ 42
§ 13. Un univers non dénombrable 42
§ 14. Unions dénombrables d'événements 44
§ 15. Unions non dénombrables d'événements 45
§ 16. Probabilité sur $\{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^{\mathbb{N}}$ 45
1.4 Probabilités conditionnelles 45
§ 17. Un exemple simple 45
§ 18. Second exemple 46
§ 19. Formule des probabilités totales 47
§ 20. Formule des probabilités composées 48
§ 21. Indépendance stochastique 48
§ 22. « Indépendance = produit » ($*$) 49
Exercices 50

2 Variables aléatoires (heuristique) 55
2.1 Variables réelles 56
§ 23. Première définition 56
§ 24. Probabilité image (ou loi) 57
§ 25. Fonctions de répartition 58
§ 26. Extension de la notion de variables aléatoires 60
§ 27. Variables discrètes 61
§ 28. Variables à densité 62
§ 29. Est-ce tout ? 64
§ 30. La connaissance de Ω est inutile 65
2.2 La notion d'espérance 65
§ 31. Points de vue du théoricien, point de vue de l'expérimentateur 65
§ 32. Le problème de la sommation 67
2.3 Espérance d'une variable discrète ou à densité 68
§ 33. Cas discret : première (tentative de) définition 68
§ 34. Deux expériences numériques 68
§ 35. Séries commutativement convergentes 70
§ 36. Seconde définition 71
§ 37. Espérance d'une variable à densité 72
Exercices 72

Partie II : Théorie et Pratique 75

3 Espaces probabilisés 77
3.1 Parties, algèbres, tribus 78
§ 38. Unions disjointes 78
§ 39. Algèbres 78
§ 40. Tribus 79
§ 41. Borne supérieure et borne inférieure 79
§ 42. Autres propriétés des tribus 80
§ 43. Construire une tribu. Tribu engendrée par un ensemble de parties 81
3.2 Espaces probabilisés 82
§ 44. Espaces probabilisables 82
§ 45. Espaces probabilisés 84
§ 46. Propriétés des mesures de probabilités 85
§ 47. Événements négligeables 87
§ 48. Espaces probabilisés complets ($*$) 87
§ 49. Systèmes complets, quasi-complets d'événements 88
§ 50. Formule du crible (ou : de Poincaré) 89
3.3 Probabilité sur $\mathbb{R}$ 90
§ 51. Fonction de répartition d'une probabilité 90
§ 52. La mesure de Lebesgue sur $[\,0\,;\,1\,]$ 92
§ 53. Probabilités finies 92
§ 54. Probabilités discrètes 93
§ 55. Probabilités à densité 93
3.4 Annexe : π-systèmes et théorème de Carathéodory 94
§ 56. π-systèmes 94
§ 57. Le théorème de Carathéodory 94
3.5 Annexe : un ensemble non mesurable 95
Exercices 96

4 Conditionnement **101**
§ 58. Probabilités conditionnelles . . . 101
§ 59. Formule des probabilités composées . . . 103
§ 60. Formule des probabilités totales . . . 103
§ 61. Théorème de Bayes . . . 104
§ 62. Quelques remarques et difficultés . . . 106
Exercices . . . 108

5 Indépendance (1/2) **111**
5.1 Indépendance d'événements et de tribus . . . 111
§ 63. Indépendance de deux événements . . . 111
§ 64. Indépendance mutuelle . . . 112
5.2 Les lemmes de Borel-Cantelli . . . 114
§ 65. Limite supérieure et limite inférieure . . . 114
§ 66. Les lemmes de Borel-Cantelli . . . 117
5.3 Application : du jeu de recouvrement au paradoxe d'Olbers . . . 119
§ 67. Le paradoxe historique d'Olbers . . . 119
§ 68. Un modèle bidimensionnel de recouvrement . . . 120
§ 69. Modèle stellaire uniforme : probabilité que le cercle... . . . 121
Exercices . . . 123

6 Variables aléatoires discrètes **127**
6.1 Variables aléatoires discrètes . . . 127
§ 70. Variable simple, variable discrète . . . 127
§ 71. Système complet induit par une variable aléatoire discrète . . . 128
§ 72. Loi d'une variable aléatoire discrète . . . 129
§ 73. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète . . . 130
§ 74. Histogrammes . . . 131
§ 75. Variables aléatoires au sens large . . . 132
6.2 Lois classiques . . . 133
§ 76. Loi uniforme . . . 133
§ 77. Loi de Bernoulli . . . 133
§ 78. Loi binomiale . . . 134
§ 79. Loi géométrique . . . 134
§ 80. Loi de Poisson . . . 136
§ 81. Tirages avec et sans remise. Loi hypergéométrique . . . 139
§ 82. Loi de l'image $\varphi(X)$ d'une variable aléatoire . . . 140
Exercices . . . 141

7 Espérance d'une variable aléatoire discrète **143**
7.1 Espérance . . . 143
§ 83. Espérance . . . 143
§ 84. Représentations de X comme combinaisons de fonctions indicatrices . . . 145
§ 85. Espérances infinies . . . 147
§ 86. Linéarité . . . 148
§ 87. Application de la linéarité au calcul pratique d'une espérance . . . 149
§ 88. Autres propriétés de l'espérance . . . 150
7.2 Moments . . . 151
§ 89. Formule de transfert . . . 151
§ 90. Moments . . . 151
§ 91. Moments centrés . . . 152

§ 92. Variance, écart-type 152
§ 93. Propriétés de la variance 155
§ 94. Variable centrée réduite 155
§ 95. Inégalité de Cauchy-Schwarz 156
§ 96. Espérance et variance des lois classiques 157
§ 97. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 157
§ 98. Atouts et faiblesses de l'inégalite de Bienaymé-Tchebychev 158
7.3 Fonctions génératrices 159
§ 99. Fonction génératrice 159
§ 100. Récupération des moments 160
§ 101. Fonctions génératrices des lois classiques 161
7.4 Un problème classique : le collectionneur 162
§ 102. Position du problème 162
§ 103. Loi du temps d'attente 163
§ 104. Une majoration de la probabilité de déviation 164
Exercices 166

8 Couples de variables aléatoires discrètes **173**
§ 105. Position du problème 173
8.1 Loi d'un couple 174
§ 106. Loi conjointe, lois marginales 174
§ 107. Lois conditionnelles 175
§ 108. Somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$ 176
§ 109. Théorème de transfert 176
8.2 Indépendance 177
§ 110. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes 177
§ 111. Indépendance mutuelle 178
§ 112. Fonctions de variables indépendantes 179
§ 113. Un exemple : minimum et maximum de variables indépendantes 180
§ 114. Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes 181
§ 115. Somme de variables indépendantes — formule de convolution 182
§ 116. Loi binomiale comme somme de lois de Bernoulli 182
§ 117. Théorèmes de stabilité 183
8.3 Covariance 183
§ 118. Covariance d'un couple discret 183
§ 119. Somme de variables aléatoires 185
§ 120. Coefficient de corrélation 187
§ 121. Invariance par changement d'échelle de $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 187
§ 122. Covariance d'un couple de données statistiques 188
8.4 Espérance conditionnelle (cas discret) 189
§ 123. Lois conditionnelles 189
§ 124. Espérance conditionnelle, première approche 190
§ 125. Espérance conditionnelle, seconde approche 191
8.5 Sommation d'un nombre aléatoire de variables 192
§ 126. Contexte historique et mathématique 192
§ 127. Identités de Wald 193
§ 128. Processus de Galton-Watson 195
§ 129. Probabilité d'extinction 196
§ 130. Évolution de la population 198
Exercices 198

9 Le jeu de pile ou face **203**

9.1 Formalisation 203

§ 131. Espace probabilisé associé à une partie infinie de *pile* ou *face* 203

§ 132. Quelques notations 204

9.2 Le motif dans le tapis 205

§ 133. Longueur moyenne de la deuxième séquence homogène 205

§ 134. Vaut-il mieux parier FPP ou PPF ? 206

§ 135. Occurrence de motifs, événements régénératifs 207

§ 136. Temps d'attente d'un des motifs PPF et FPP 209

§ 137. Temps d'attente du motif PPP 210

9.3 Théorèmes limites 211

§ 138. Une certitude : la moyenne 211

§ 139. Retour à l'équilibre et marches aléatoires 213

9.4 Les nombres normaux existent ! 215

§ 140. Une suite de variables de Bernoulli indépendantes est un réel de $[0\,;1[$ (et vice-versa) 215

§ 141. Propriétés des fonctions de Rademacher 216

§ 142. Le théorème des nombres normaux de Borel 218

§ 143. Existence de nombres complètement normaux 218

Exercices 220

10 Variables aléatoires à densité **223**

§ 144. À propos de l'intégrabilité des fonctions 223

10.1 Variables aléatoires à densité 224

§ 145. Variables continues 224

§ 146. Variables absolument continues, ou à densité 224

§ 147. Propriétés de la densité de probabilité 227

§ 148. Changement d'échelle 227

§ 149. Médiane 228

§ 150. Variables symétriques 229

10.2 Lois classiques 229

§ 151. Loi uniforme 229

§ 152. Loi exponentielle 230

§ 153. Loi normale centrée réduite 231

§ 154. Loi normale 232

§ 155. Loi de Cauchy 234

§ 156. Loi Γ (Gamma) 235

§ 157. Loi γ 235

§ 158. Loi du χ^2 235

§ 159. Loi bêta $\mathrm{B}(a, b)$ 235

10.3 Changement de variable aléatoire 237

§ 160. Loi de $\varphi(\mathrm{X})$ lorsque φ est injective 237

§ 161. Loi de $\varphi(\mathrm{X})$: cas général 238

§ 162. Simuler une loi à densité 239

Exercices 241

11 Espérance d'une variable aléatoire à densité **245**

11.1 Espérance et moments 245

§ 163. Espérance 245

§ 164. Formule de transfert 246

§ 165. Moments 247

§ 166. Moments centrés 247
§ 167. Variance 248
§ 168. Inégalité de Cauchy-Schwarz 249
§ 169. Espérance et variance des lois classiques 249
§ 170. Variables centrées réduites 252
§ 171. Autres caractéristiques numériques d'une variable aléatoire à densité . . 252
11.2 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev 253
§ 172. Inégalité de Markov 253
§ 173. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 253
Exercices 254

12 Couples de variables à densité **257**
12.1 Loi d'un couple 257
§ 174. Loi d'un couple, lois marginales 257
§ 175. Couple admettant une densité 258
§ 176. Densités marginales 261
§ 177. Somme de deux variables aléatoires à densité 261
§ 178. Théorème de transfert 263
12.2 Indépendance 263
§ 179. Indépendance de deux variables aléatoires à densité 263
§ 180. Indépendance mutuelle 264
§ 181. Somme de deux variables aléatoires indépendantes 265
§ 182. Somme de lois normales indépendantes 266
§ 183. Un exemple : quotient de deux lois normales 266
§ 184. Maximum et minimum de N variables aléatoires indépendantes 267
§ 185. Espérance du produit de variables indépendantes 268
12.3 Covariance 269
§ 186. Covariance d'un couple à densité 269
§ 187. Coefficient de corrélation 270
12.4 Lois conditionnelles 271
§ 188. Lois conditionnelles 271
§ 189. Exemple de variable conditionnée par une autre 274
§ 190. Un exemple de loi mixte (discret, continu) : temps d'attente du métro . 274
§ 191. Espérances conditionnelles 277
Exercices 278

Partie III : Plus formellement... **289**

13 Variables aléatoires : cas général **291**
13.1 Mesurabilité 291
§ 192. Définition d'une variable aléatoire 291
§ 193. Calcul des images réciproques 292
§ 194. Quelques résultats sur la mesurabilité 292
13.2 Fonction de répartition 294
§ 195. Loi d'une variable aléatoire 294
§ 196. Fonction de répartition 294
§ 197. Variables discrètes, continues, mixtes 296
§ 198. Décomposition de Lebesgue d'une fonction de répartition 297
§ 199. Densité au sens des distributions 299
§ 200. Une définition de l'espérance n'utilisant que la fonction de répartition . 300

§ 201. L'espérance et les notations de l'intégrale de Stieltjes 301
13.3 Limite simple de variables aléatoires 302
Exercices 304

14 L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité 307
14.1 Construction de l'espérance comme intégrale 308
§ 202. Espérance d'une variable aléatoire simple 308
§ 203. Espérance d'une variable aléatoire positive 309
§ 204. Espérance comme limite croissante d'une suite de variables simples (∗) . 309
§ 205. Espérance d'une variable aléatoire réelle 310
§ 206. Espérance d'une variable aléatoire complexe 311
§ 207. Propriétés de l'espérance ; espace $\mathcal{L}^1$ 311
§ 208. Intégration sur une partie 313
§ 209. Espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1 313
§ 210. Moments d'ordre supérieur 313
14.2 Théorèmes de convergence 314
§ 211. Théorème de convergence monotone 314
§ 212. Lemme de Fatou 315
§ 213. Théorème de convergence dominée 316
§ 214. La Cavalerie Légère à l'œuvre 317
14.3 Le théorème de transfert et ses applications 317
§ 215. Le théorème général 317
§ 216. Cas des variables à densité 319
14.4 Espace L^2 ; interprétations géométriques 321
§ 217. Espaces $\mathcal{L}^2$ et L^2 321
§ 218. Inégalité de Cauchy-Schwarz 321
§ 219. Covariance 322
§ 220. Structure de l'espace L^2 322
§ 221. Interprétations géométriques 324
§ 222. Meilleur estimateur quadratique d'une variable aléatoire 325
14.5 Inégalités 326
§ 223. Inégalité de Markov 326
§ 224. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev 326
§ 225. Inégalité de Bernstein 328
§ 226. Inégalité de Jensen (convexité) 328
14.6 Annexe : le théorème de convergence monotone 329
Exercices 329

15 Vecteurs aléatoires 331
§ 227. Notations 331
15.1 Probabilités sur $\mathbb{R}^n$ 332
§ 228. Boréliens de $\mathbb{R}^n$ 332
§ 229. Probabilité produit 332
§ 230. Densités 332
15.2 Vecteurs aléatoires 332
§ 231. Espérance 333
§ 232. Matrice de covariance 333
§ 233. Inégalité de Cauchy-Schwarz 334
15.3 Fubini !!! 335
§ 234. Le théorème de Fubini en pratique 335
§ 235. Application : densités marginales 335

§ 236. Application : expression alternative de l'espérance 336
15.4 Changements de variables aléatoires 337
§ 237. Changement de vecteur aléatoire 337
§ 238. Somme, produit et quotient de deux variables aléatoires 338
Exercices 339

16 Indépendance (2/2) 341
16.1 Indépendance de variables aléatoires 341
§ 239. Indépendance de deux variables aléatoires 341
§ 240. Indépendance de classes et de tribus d'événements 343
§ 241. Indépendance de n variables aléatoires 344
§ 242. Caractérisations de l'indépendance de variables aléatoires 344
§ 243. Coalitions 344
§ 244. Indépendance de variables aléatoires discrètes 345
§ 245. Indépendance de variables aléatoires à densité 345
16.2 Somme et produit de variables aléatoires indépendantes 346
§ 246. Espérance d'un produit 346
§ 247. Formule de convolution 348
§ 248. Formule de convolution pour les variables à densité 349
§ 249. Somme de n variables aléatoires indépendantes 350
16.3 Temps d'arrêt et identité de Wald 350
§ 250. Notion de temps d'arrêt 350
§ 251. Temps d'arrêt et identités de Wald 351
Exercices 354

17 Fonctions caractéristiques 357
§ 252. Variables aléatoires complexes 357
§ 253. Fonction caractéristique 358
§ 254. Cas des variables aléatoires discrètes 359
§ 255. Propriétés de la fonction caractéristique 359
§ 256. Fonction caractéristique d'une somme de variables indépendantes . . . 360
§ 257. Théorème d'unicité 360
§ 258. Fonction caractéristique et indépendance 361
§ 259. Régularité de la fonction caractéristique 361
§ 260. Fonctions caractéristiques usuelles 362
§ 261. Le théorème de continuité de Paul Lévy 362
Exercices 363

18 Vecteurs gaussiens 365
18.1 Lois normales sur $\mathbb{R}^2$ 365
§ 262. Lois normales et extension 365
§ 263. Lois normales sur $\mathbb{R}^2$: cas non dégénéré 366
§ 264. Réduction d'une loi normale non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$ 368
18.2 Aspects numériques de lois normales sur $\mathbb{R}^2$ 370
§ 265. Lois marginales 370
§ 266. Combinaisons linéaires de X et Y 370
§ 267. Densités conditionnelles 372
§ 268. Ellipses d'égale densité 372
18.3 Vecteurs gaussiens 374
§ 269. Définition des vecteurs gaussiens 374
§ 270. Caractérisation par les combinaisons linéaires 375

§ 271. Indépendance et décorrélation 375
§ 272. Décomposition d'un vecteur gaussien 376
§ 273. Densité d'un vecteur gaussien 377
§ 274. Ellipsoïdes d'égale densité et loi du χ^2 378
§ 275. Lemme des moments (théorème de Wick) 378
Exercices 379

Partie IV : Théorèmes limites 381

19 Convergence 383
§ 276. Introduction aux théorèmes limites 383
19.1 Convergence presque sûre, convergence en probabilité 385
§ 277. Convergence presque sûre 385
§ 278. Critères de convergence presque sûre ($*$) 386
§ 279. Convergence en probabilité 388
§ 280. Une caractérisation par l'espérance 388
§ 281. Convergence et images de variables aléatoires 389
§ 282. Comparaison entre convergence en probabilité et convergence p.s. . . . 389
§ 283. Une distance sur l'espace des variables aléatoires ($*$) 391
19.2 Convergence en moyenne et dans L^p 392
§ 284. Convergence en moyenne et dans L^p 392
§ 285. Convergence en probabilité et convergence dans L^p ($*$) 392
19.3 Convergence en loi 393
§ 286. Convergence en loi 393
§ 287. Convergence en loi *versus* convergence étroite 394
§ 288. Convergence en loi et convergence en probabilité 396
§ 289. Convergence en loi de variables discrètes 396
§ 290. Convergence en loi de variables à densité 399
§ 291. Convergence en loi et fonctions caractéristiques 401
§ 292. Convergence en loi vers une constante 401
§ 293. Convergence en loi d'un couple, théorème de Slutsky 402
19.4 Une application : produit scalaire de vecteurs unitaires aléatoires . 403
§ 294. Vecteur aléatoire sur la sphère S_n 403
§ 295. Loi du produit scalaire 403
§ 296. Loi limite 404
19.5 Seconde application : suites équidistribuées 405
§ 297. Suites équidistribuées 405
§ 298. Critère de Weyl 405
§ 299. Application aux suites ($n\alpha \mod 1$) 407
19.6 Résumé synoptique 409
19.7 Annexe : convergence étroite 410
§ 300. Théorème de représentation de Skorokhod 410
§ 301. Équivalence de la convergence en loi et de la convergence étroite 410
Exercices 412

20 Loi des grands nombres 417
20.1 La loi du tout ou rien 417
§ 302. Événements de queue, tribu asymptotique 417
§ 303. Loi du 0–1 de Kolmogorov 419
§ 304. Loi du tout ou rien pour les événements 420

§ 305. Loi du tout ou rien de Hewitt-Savage (∗) 420
§ 306. Une application aux séries aléatoires 421
§ 307. Une application aux marches aléatoires 421
20.2 Lois des grands nombres 423
§ 308. La loi faible des grands nombres 424
§ 309. La loi forte des grands nombres 425
§ 310. Cas de la divergence (∗) 427
20.3 Théorème de Glivenko-Cantelli 428
§ 311. Fonction de répartition empirique 428
§ 312. Application : le test de Kolmogorov-Smirnov 430
20.4 Annexe : démonstration de la loi des grands nombres 432
Exercices 434

21 Le théorème limite central **437**
§ 313. Au-delà de la loi des grands nombres 437
§ 314. Le théorème limite central 438
§ 315. Autres formes du théorème limite central (∗) 440
§ 316. Forme locale du théorème limite central 441
§ 317. Évaluation de la vitesse de convergence 442
§ 318. Extension aux variables vectorielles (∗) 443
§ 319. Utilité du théorème limite central 443
§ 320. La physique et la loi du $1/\sqrt{n}$ 443
§ 321. Au-delà du théorème limite central : la loi du logarithme itéré 444
Exercices 446

22 Techniques d'approximation **447**
22.1 Approximations poissoniennes 447
§ 322. Convergence vers une loi de Poisson 447
§ 323. Approximation poissonienne d'une loi binomiale 448
22.2 Approximation normale 449
§ 324. Approximation normale d'une loi binomiale ; correction de continuité . . 449
§ 325. Approximation normale d'une loi de Poisson 451
§ 326. Approximation normale et de inégalité de Bienaymé-Tchebychev 452
§ 327. Estimer un nombre de lancers nécessaires 453
§ 328. Résumé des conditions d'approximation 456
22.3 Régression linéaire 456
§ 329. Droite de régression 456
§ 330. Droite de régression par rapport à y 457
§ 331. Corrélation et causalité 459
22.4 Estimation 460
§ 332. Un exemple : moyenne empirique 460
§ 333. Un exemple : variance empirique 460
§ 334. Notion d'estimateur 462
§ 335. Risque quadratique 462
§ 336. Intervalles de confiance 463
Exercices 464

23 Espérance conditionnelle **469**
23.1 Le cas fini ou dénombrable 469
§ 337. Espérance conditionnelle sachant une partition 470
§ 338. Un autre point de vue 471

§ 339. La propriété fondamentale de l'espérance conditionnelle 472
§ 340. Propriétés élémentaires 472
§ 341. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire discrète 474
§ 342. Fonctions mesurables selon une partition dénombrable 475
23.2 Le cas général 476
§ 343. Espérance d'une variable aléatoire sachant un événement 476
§ 344. Espérance conditionnelle sachant une tribu 476
§ 345. Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire 478
§ 346. Lemme de factorisation 478
§ 347. Propriétés de l'espérance conditionnelle 478
§ 348. Théorèmes de convergence 479
§ 349. Densités conditionnelles (∗) 480
§ 350. Le point de vue hilbertien : l'espérance conditionnelle comme projection 480
23.3 Martingales 482
§ 351. Ma première martingale 482
§ 352. Filtrations, martingales 482
§ 353. Sur- et sous-martingales 484
§ 354. Théorème de convergence des martingales 484
§ 355. Applications 487
23.4 Annexe : probabilités conditionnelles (∗) 487
§ 356. Probabilité conditionnelle sachant une partition dénombrable 487
§ 357. Probabilité conditionnelle sachant une variable aléatoire 488
§ 358. Probabilité conditionnelle sachant une tribu 488
Exercices 489

Partie V : Quelques applications 493

24 Quelques résultats établis par la théorie des probabilités 495
§ 359. La formule de Bernstein 495
§ 360. L'existence de nombres complètement normaux 498
§ 361. Points singuliers du cercle de convergence d'une série entière 499
§ 362. Le théorème de Weierstrass et les polynômes de Bernstein 501
§ 363. En guise de conclusion 506
Exercices 506

25 Simuler informatiquement une loi de probabilité 509
25.1 Simuler une loi discrète 509
§ 364. Simuler une loi de Bernoulli 510
§ 365. Simuler une loi binomiale 510
§ 366. Simuler une loi discrète finie 510
§ 367. Simuler une loi géométrique 511
§ 368. Simuler une loi de Poisson 512
25.2 Simuler une loi continue 513
§ 369. Méthode de l'inverse 513
§ 370. Méthode du rejet 514
§ 371. Mélange de fonctions de répartition 516
25.3 Simuler une loi normale 518
§ 372. Méthode découlant du théorème limite central 518
§ 373. Méthode de la transformée inverse 518
§ 374. Méthode de Box-Muller 518

§ 375. Méthode du rejet 520
§ 376. Simulation d'un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^2$ 521
25.4 Remarques sur les générateurs d'une loi uniforme 523
§ 377. Remarques préliminaires 523
§ 378. Générateur à récurrence linéaire 525
§ 379. Récurrences d'ordre supérieur, ou non linéaires 526
§ 380. Brève remarque historique 527
Exercices 528

26 Méthodes de Monte-Carlo 531
26.1 Estimation d'une moyenne 532
§ 381. L'aiguille de Buffon 532
26.2 Intégration numérique 534
§ 382. Position du problème 534
§ 383. Convergence de la méthode 537
§ 384. Effet de la dimension 537
26.3 Laissons faire le hasard ! 538
§ 385. Un exemple arithmétique : tests de primalité 538
§ 386. Une machine à deviner des conjectures : le modèle de Cramér 542
§ 387. Le hasard et les algorithmes de recherche de solution optimale 543
§ 388. Falsification de données comptables et la loi de Benford 544
Exercices 547

27 Arithmétique et probabilités : une randonnée 549
27.1 Exemple élémentaire 550
27.2 Le théorème de Erdős-Kac et la loi normale 551
27.3 Écarts entre nombres premiers et lois de Poisson 553
27.4 Valeurs propres de matrices aléatoires 555

28 Bosons, fermions et boltzmannions 559
28.1 Le facteur de Boltzmann 559
§ 389. Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques 559
§ 390. « Nombre de complexions » d'un état 561
§ 391. Un exemple (très) élémentaire 562
§ 392. Le facteur de Boltzmann 563
28.2 Statistiques quantiques 566
§ 393. L'entropie et le paradoxe de Gibbs 566
§ 394. Fermions et bosons 568
§ 395. Nombre d'états occupés 570

29 Processus de Poisson 573
§ 396. Introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$? . . . 573
§ 397. Processus de comptage 574
§ 398. Processus de Poisson 574
§ 399. Caractérisation des processus de Poisson 575
§ 400. Processus marqués 576
§ 401. Distribution des instants d'arrivée 577
§ 402. Effet physique : le bruit de grenaille 577
§ 403. Âge et temps de vie résiduel 577
§ 404. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ 578
§ 405. Processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ 579
Exercices 579

30 Mouvements browniens **581**
30.1 Une approche heuristique . . . 581
§ 406. L'observation de Robert Brown . . . 581
§ 407. Marche aléatoire discrète et passage à la limite continue . . . 582
§ 408. Limite continue — première approche . . . 583
§ 409. Limite continue — seconde approche . . . 584
§ 410. Une propriété du noyau de la chaleur . . . 586
§ 411. Limite continue d'une marche aléatoire asymétrique . . . 587
§ 412. Marche aléatoire en dimension supérieure . . . 587
§ 413. Temps moyen de visite . . . 588
§ 414. Dernières remarques . . . 589
30.2 Modélisation probabiliste . . . 590
§ 415. Définition . . . 591
§ 416. La loi du mouvement brownien est la loi limite de marches aléatoires . . 592
§ 417. Loi du mouvement brownien ; mesure de Wiener . . . 593
§ 418. Construction canonique du mouvement brownien . . . 594
§ 419. Covariance . . . 595
30.3 Propriétés des chemins browniens . . . 596
§ 420. Invariances . . . 596
§ 421. Propriétés de régularité . . . 596
§ 422. Récurrence : le théorème de Pólya . . . 597
§ 423. Autres propriétés (∗) . . . 597
§ 424. Construction de Lévy-Ciesielski du mouvement brownien . . . 598
30.4 Mouvement brownien, physique et potentiels . . . 600
§ 425. Le modèle d'Einstein et la détermination du nombre d'Avogadro . . . 600
§ 426. Problème de Dirichlet et méthode de Monte-Carlo . . . 600
§ 427. Mouvement brownien et potentiel capacitif . . . 603
§ 428. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 1$) . . . 603
§ 429. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d = 2$) . . . 604
§ 430. Théorie du potentiel et propriétés de récurrence ($d \geqslant 3$) . . . 605
30.5 Annexes . . . 607
§ 431. Détermination du noyau de la chaleur . . . 607
§ 432. Démonstration du théorème de Paley-Wiener-Zygmund . . . 607
Exercices . . . 609

31 Estimation bayésienne **613**
§ 433. Distribution *a priori* uniforme, et distribution *a posteriori* . . . 613
§ 434. Choix d'une autre distribution *a priori* . . . 616
Exercices . . . 616

32 Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires **617**
32.1 L'iniquité flagrante d'un jeu équitable . . . 617
§ 435. La loi de l'Arc sinus . . . 617
32.2 Séries harmoniques de signe aléatoire . . . 619
§ 436. Cas d'une pièce déséquilibrée . . . 619
§ 437. Cas équilibré . . . 619
32.3 Rayon d'une série entière aléatoire . . . 621
§ 438. Le rayon est presque sûrement constant . . . 621
§ 439. Trois rayons sont possibles . . . 621

33 En guise de conclusion : à propos de quelques paradoxes **625**
33.1 Biais d'équiprobabilité 625
§ 440. Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes 625
§ 441. Le problème de Monty Hall 626
§ 442. Retour au problème des deux cassettes 627
33.2 Problèmes dus à l'interprétation de l'espérance 628
§ 443. L'espérance d'un jeu n'est pas un critère suffisant 628
§ 444. Paradoxe de Saint-Pétersbourg 628
33.3 Pseudo-paradoxes 631
§ 445. Le paradoxe de Walter Penney 631
Exercices 632

Annexes

A Éléments d'analyse et d'algèbre **637**
A.1 Suites 637
A1. Fini, dénombrable, indénombrable 637
A2. Limite supérieure, limite inférieure 638
A3. Suites de Cauchy 638
A4. Comparaison de suites 639
A5. Formule de Stirling 639
A.2 Séries numériques 639
A6. Définitions 639
A7. Séries positives 639
A8. Produits infinis 640
A9. Convergence absolue 640
A10. Exponentielle complexe 640
A11. Changement d'ordre de sommation 641
A12. Familles sommables positives 642
A13. Familles sommables de signes quelconques 642
A14. Théorème de Fubini pour les séries doubles 642
A15. Théorème de convergence dominée discrète 644
A.3 Fonctions 644
A16. Continuité, continuité à droite 644
A17. Fonctions à variation bornée 644
A18. Fonctions absolument continues 645
A19. Fonction Γ d'Euler 645
A20. Fonction d'erreur, fonction de survie de la loi normale 645
A.4 Fonctions croissantes 646
A21. Continuité, continuité à gauche, à droite 646
A22. Discontinuités de 1re et 2e espèce. 646
A23. Sauts de discontinuité d'une fonction croissante 647
A24. Régularité d'une fonction croissante 647
A25. Décomposition de Lebesgue 648
A26. Une fonction singulière : la fonction de Cantor 648
A27. Pseudo-inverse d'une fonction de répartition 649
A.5 Fonctions convexes 650
A28. Fonctions convexes, strictement convexe, concaves 650
A29. Caractérisation par la pente 651
A30. Caractérisation par la dérivée 651
A31. Cordes, tangentes et demi-tangentes 651
A32. Inégalités de Jensen 652
A.6 Modes de convergence de suites et séries de fonctions 652
A33. Convergence simple et convergence uniforme 652
A34. Théorèmes de Weierstrass 653

A35. Séries de fonctions 653
A.7 Séries entières 653
A36. Rayon 653
A37. Fonctions définies par une série entière 654
A38. Lemme radial d'Abel 654
A39. Produit de Cauchy de deux séries entières 654
A40. Quelques sommes 655
A.8 Calcul intégral 655
A41. Théorème de Fubini 655
A42. Changement de variable dans $\mathbb{R}^n$ 656
A43. Produit de convolution 656
A44. Quelques intégrales utiles 657
A45. Méthode des multiplicateurs de Lagrange 657
A.9 Espaces de Hilbert 657
A46. Espaces préhilbertiens 657
A47. Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes 658
A48. Théorème de projection orthogonale 659
A.10 Transformée de Fourier 659
A49. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable 659
A50. Distributions. Distributions tempérées 659
A51. Transformée de Fourier d'une distribution 660
A.11 Dénombrement 660
A52. Coefficients binomiaux 660
A53. Formulaire pour les coefficients binomiaux 661
A54. Nombres de Stirling 661
A.12 Topologie élémentaire 663
A55. Ouverts, fermés 663
A56. Espaces complets 663
A.13 Réduction, théorème spectral 663
A57. Adjoint 663
A58. Théorème spectral 664
A59. Matrices symétriques positives, définies positives 664
Exercices 664

B Davantage sur la mesure **665**
B.1 Boréliens 665
A60. Boréliens de $\mathbb{R}$ 665
A61. Boréliens de $\mathbb{R}^n$ 667
A62. Boréliens de $\mathbb{R}^\infty$ 667
A63. Tribus produits, espaces produits 667
B.2 Fonctions mesurables 668
A64. Définition et premières propriétés 668
A65. Tribu engendrée par une variable aléatoire 669
B.3 Un complément au jeu de *pile* ou *face* 670
A66. Additivité dénombrable de $\mathbf{P}_0$ sur la classe $\mathfrak{C}$ des cylindres (∗) 670
B.4 Le lemme de classe monotone 671
A67. π-systèmes et classes monotones 671
A68. Première application : le lemme des coalitions 673
A69. Deuxième application : rôle central de la fonction de répartition 674
A70. Le théorème d'extension de Carathéodory 675
B.5 Le théorème de Radon-Nikodým 675
A71. Mesure absolument continue par rapport à une autre 675
A72. Le théorème de Radon-Nikodým 675
Exercices 676

C Théorèmes d'existence **679**
C.1 Deux exemples simples de théorèmes d'existence 679
A73. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée 679
A74. Un exemple de suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires indépendantes 680

C.2 Le théorème fondamental de Kolmogorov 681
A75. Conditions de compatibilité et théorème d'extension 681

D Tables **685**
D.1 Langage ensembliste et langage probabiliste 685
D.2 Probabilités 686
A76. Axiomes 686
A77. Théorèmes d'intégration 686
A78. Formules utiles 686
A79. Tables des principales lois 687
A80. Loi normale centrée réduite 688

E Lexique français-anglais **689**

Références **691**

Index **695**

Notations

Abréviations	
CNS	condition nécessaire et suffisante
CP	critère pratique
p.s.	presque sûre, presque sûrement
p.p.	presque partout
Ensembles	
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{P}$	ensemble des entiers premiers $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
$\mathfrak{P}(\Omega)$	ensemble des parties de Ω
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$	intersection de A et B
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	réunion de A et B
$\mathrm{A} + \mathrm{B}$	réunion disjointe de A et B ($\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, $\mathrm{A} + \mathrm{B} := \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$)
$\sum \mathrm{A}_n$	réunion disjointe
$\mathrm{A} \smallsetminus \mathrm{B}$	$= \mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c$
$\mathrm{A} - \mathrm{B}$	$= \mathrm{A} \smallsetminus \mathrm{B}$, étant entendu que $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$
A^c	complémentaire de A (dans Ω)
$\mathrm{A}_n \uparrow \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} = \lim \uparrow \mathrm{A}_n$	limite croissante
$\mathrm{A}_n \downarrow \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} = \lim \downarrow \mathrm{A}_n$	limite décroissante
$\mathrm{A}^* = \limsup \mathrm{A}_n$	
$\mathrm{A}_* = \liminf \mathrm{A}_n$	
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices carrées d'ordre n
$\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$	ensemble des vecteurs colonnes d'ordre n
$\mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{K})$	ensemble des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^k$
Fonctions	
$f(x^+),\ f(x+0)$	limite à droite $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x+h)$
$f(x^-),\ f(x-0)$	limite à gauche $\lim\limits_{h \to 0^-} f(x+h)$
$f(+\infty)$	limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
$f(-\infty)$	limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
$f \otimes g$	produit tensoriel $(x, y) \mapsto f(x)\, g(y)$
$f * g$	produit de convolution

Lettres gothiques															
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{X}$
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	M	m	O	P	T	X

Probabilités		
Ω	univers, espace des épreuves	
$\mathfrak{T},\ \mathfrak{F},\ \mathfrak{A}$	tribus (« T » et « F » gothiques) ou algèbres (« A »)	
ω	réalisation du hasard (élément de Ω)	
$\mathbf{P},\ \mathbf{Q}$	probabilités	
$\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{T}, \ldots$	variables aléatoires	
$\mathbf{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$	covariance du couple (X, Y)	
$\mathbf{E}(\mathrm{X}), \mathbf{E}\mathrm{X}$	espérance de la variable X	
$\mathbf{P}(\mathrm{A}), \mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \mathrm{B}\}$	probabilité	
$\mathbf{V}(\mathrm{X})$	variance de la variable X	
$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{X}}$	écart-type de X	
$\mathfrak{N}(x)$	fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(0\ ;\ 1)$	§ 154
$\mathfrak{n}(x)$	densité de probabilité de la loi $\mathscr{N}(0\ ;\ 1)$	§ 154
$\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}$	événement lié à une variable aléatoire	
$\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$	probabilité produit	§ 229
$f \otimes g$	produit direct $(f \otimes g)(x, y) = f(x)\, g(y)$	
$\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y},\ \mathrm{X} \wedge m$	$\min(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),\ \min(\mathrm{X}, m)$	
X'	variable centrée $\mathrm{X}' = \mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X})$	
X^*	variable centrée réduite $\mathrm{X}^* = (\mathrm{X} - \mathbf{E}\mathrm{X})/\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{X}}$	
X^+	$\max(\mathrm{X}, 0)$	§ 205
X^-	$\max(-\mathrm{X}, 0)$	§ 205
$\mathrm{X}_n \xrightarrow{\mathrm{ps}} \mathrm{X}$	convergence presque sûre	§ 277
$\mathrm{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathrm{X}$	convergence en proba	§ 279
$\mathrm{X}_n \overset{\mathrm{L}}{\Longrightarrow} \mathrm{X}$	convergence en loi (convergence étroite)	§ 286
$\mathrm{X}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p} \mathrm{X}$	convergence dans L^p	§ 284
$\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathscr{L}$	X suit la loi $\mathscr{L}$	
$\mathscr{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p	$p \in [\,0\,;\,1\,]$
$\mathscr{B}(n\ ;\ p)$	loi binomiale de paramètres n et p	$n \in \mathbb{N}$,
$\mathscr{E}(\alpha)$	loi exponentielle de paramètre α	
$\mathscr{G}_{\mathbb{N}}(p)$	loi géométrique de paramètre p	
$\mathscr{N}(m\ ;\ \sigma^2)$	loi normale de moyenne m et de variance σ^2	
$\mathscr{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ	
$\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$	tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^n$	
$\mathfrak{T},\ \mathfrak{E}, \ldots$	tribus	
$\mathfrak{D}_{\mathrm{X}}$	système complet induit par une variable discrète	
$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$ est plus fine que $\mathfrak{B}$	
$\sigma(\mathrm{X})$	tribu engendrée par X	
$\sigma(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$	tribu engendrée par $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$	
δ_a	mesure de Dirac en a	
$\Delta(x, y)$	$\{(s, t) \in \mathbb{R}^2\ ;\ s \leqslant x,\ t \leqslant y\}$	§ 174
$\mathcal{L}^0(\Omega)$	espace des variables aléatoires	§ 192
$\mathcal{L}^0_+(\Omega)$	espace des variables aléatoires positives	§ 192
$\mathcal{L}^0_{\mathrm{b}}(\Omega)$	espace des variables aléatoires bornées	§ 192
$\mathcal{L}^1,\ \mathrm{L}^1$	espaces des variables intégrables : $\mathbf{E}\,\lvert\mathrm{X}\rvert < +\infty$	§ 209
$\mathcal{L}^2, \mathrm{L}^2$	espaces des variables de carre intégrables : $\mathbf{E}\,\lvert\mathrm{X}\rvert^2 < +\infty$	§ 217

Introduction

Je considère que la théorie des probabilités n'est pas seulement une branche des mathématiques, et ne se limite pas à une collection harmonieuse d'axiomes et de théorèmes. À mon idée, le calcul des probabilités est un mode de pensée.

Mark KAC, *1961.*

§ 1 Les lois du hasard

Les termes qui reviennent le plus souvent dans un ouvrage de probabilité sont, paradoxalement, « loi » et « presque sûrement » — des locutions associées à la certitude plutôt qu'à l'aléatoire.

Les lois du hasard,

quel bel oxymore ! Et pourtant, c'est bien à étudier les lois (prévisibles) du hasard (par nature imprévisible) que Pascal, plusieurs Bernoulli, Tchebychev, Kolmogorov et autres grands mathématiciens se sont attachés. Que des certitudes puissent apparaître est sans doute un phénomène connu depuis longtemps : au cours d'un grand nombre de tirages, une pièce équilibrée doit mener au résultat *pile* avec une fréquence proche de $1/2$, et même d'autant plus proche que le nombre de tirages est grand. C'est presque une tautologie — si l'on observe une fréquence limite qui n'est pas $1/2$, on dira tout simplement que la pièce n'est pas équilibrée. Mais ce n'en est pas une : l'intérêt de la mathématisation du problème est de montrer que la fréquence observée admet *effectivement* une limite. Ce théorème, appelé *loi des grands nombres*, fut une révolution en soi : de qualitatif, l'étude du comportement du hasard est devenu quantitatif, et permet donc de prédire des nouveaux phénomènes.

Voici un exemple graphique, plus élaboré mais frappant : ci-dessous, à gauche, une représentation d'une matrice carrée A, dont les coefficients ont été tirés « au hasard » dans l'intervalle $[0\,;1]$. Chaque valeur de gris correspond à une valeur réelle (0 pour noir, 1 pour blanc). Maintenant, inversons cette matrice⟨1⟩ et obser-

⟨1⟩. Elle est sans doute inversible, comme doivent l'être la plupart des matrices dont les vons, à droite, le résultat (le noir correspond maintenant à la valeur du plus petit coefficient, le blanc à celle du plus grand).

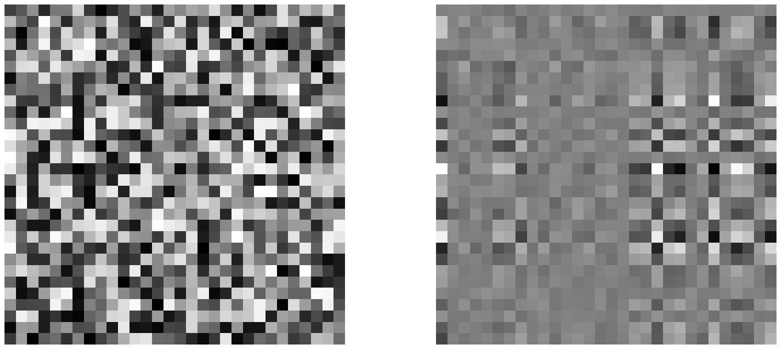


Fig. 0.1 — À gauche : *Une matrice carrée à coefficients aléatoires dans* $[0;1]$.
À droite : *L'inverse de cette matrice.*

Que s'est-il passé ? L'aspect « nettement aléatoire » de la première figure a disparu, remplacé par une sorte de motif écossais délavé. Un ordre a surgi du hasard !

But de la théorie § 2

On dit parfois en manière de plaisanterie que *le but de la théorie des probabilités est de calculer des probabilités.*

Cette galéjade cache un réel malaise : la notion de probabilité telle qu'étudiée par un mathématicien est sans aucun doute très éloignée de la notion qu'en auront un physicien, un philosophe, ou le fameux homme de la rue (quand il n'est pas philosophe ou mathématicien). La notion elle-même est suffisamment fuyante pour qu'il soit confortable de se cacher derrière les formules et les techniques de calcul et éluder la question de la signification, en la laissant à d'autres.

- La première interprétation, et la plus fréquente, est statistique, et résumée par la formule « nombre de cas favorables sur nombre total de cas ». Mais très rapidement, on en vient à manipuler des nombres infinis et un appareillage mathématique plus sophistiqué est requis. On doit alors faire un saut conceptuel et construire, en confiance, un *modèle*, dont on espère qu'il décrira le monde avec la précision et les propriétés voulues. Pour tester ce modèle, on peut tenter de répéter une expérience un grand nombre de fois, et calculer une fréquence limite. Plusieurs problèmes se posent alors : que veut dire un grand nombre de fois ? que veut dire répéter une expérience ? La réponse mathématique est de considérer des *suites de variables aléatoires indépendantes*, et d'établir des théorèmes affirmant que, sous certaines conditions, la fréquence limite observée est bien la valeur attendue.
- Il existe d'autres interprétations. Pour certains, les probabilités objectives n'existent pas, il n'existe que des probabilités subjectives, qui mesurent notre degré de confiance en certains événements.
- Enfin, on peut se débarrasser des difficultés conceptuelles en les ignorant tout simplement : on décide de s'abstraire entièrement du contexte historique des probabilités, et de n'envisager la théorie que comme un prolongement de la

coefficients sont des réels choisis « au hasard ». Le lecteur sera invité à réfléchir à ce problème ultérieurement.

théorie de la mesure et de l'intégration. On peut alors axiomatiser entièrement la théorie, la débarrasser de tous les problèmes d'interprétation, de toute référence à des situations concrètes, et réduire la théorie des probabilités à une branche mathématique aussi pure, aussi nette que les autres. Ce point de vue a un côté stérile. Bien que le véritable essor des probabilités n'ait pu avoir lieu qu'une fois l'axiomatisation correctement faite et une théorie de l'intégration profondément ancrée dans le sol mathématique, il n'en reste pas moins que la motivation à la base des travaux les plus cruciaux se rattache à des situations concrètes : phénomènes physiques ou biologiques, calculs de risques, détermination de stratégies. Quoi que l'on fasse, les probabilités restent une branche unique des mathématiques, avec ses propres méthodes et, surtout, ses propres types de raisonnements⟨2⟩.

Comme à chaque fois que les mathématiciens s'approprient un concept — le hasard n'a appartenu, des siècles durant, qu'au champ de la philosophie, de la métaphysique ou des controverses de comptoir —, les outils mathématiques qu'ils créent deviennent en eux-mêmes un objet d'étude. Une part importante de tout ouvrage de probabilités est consacrée à l'étude des concepts et des méthodes spécifiques au champ d'étude du hasard, qui ont pour noms *variables aléatoires*, *indépendance*, *fonction de répartition*, *espérance*, *convergence presque sûre*, *convergence en loi*, etc.

§ 3 Quelques mots sur l'ouvrage

Aucune connaissance spécifique aux probabilités n'est requise pour aborder l'ouvrage, qui commence par une introduction heuristique aux idées et au langage de l'aléatoire. Cette partie est indépendante du reste de l'ouvrage⟨3⟩.

Les mathématiques nécessaires à la compréhension du texte sont rappelées en annexe⟨4⟩.

L'ouvrage est découpé en plusieurs parties :

- La partie I présente, de manière assez informelle, les idées essentielles de la théorie (probabilités conditionnelles, indépendance, variables aléatoires, espérance), ainsi que les problèmes théoriques auxquels on est confronté lorsque l'on manipule des univers infinis.
- La partie II débute par un chapitre assez formel sur les espaces probabilisés. Ce chapitre peut être lu en deux temps : dans un premier temps, seuls les passages balisés par le symbole « ▶ » peuvent être étudiés. Suivent les notions de probabilité conditionelle et d'indépendance. Le reste de la partie traite de deux grandes classes de variables aléatoires (discrètes et à densité), et est tourné vers l'étude pratique. Il correspond globalement au niveau des probabilités exigées en début de cycle universitaire, en classes préparatoires ou au CAPES de mathématiques. Un interlude sur le jeu de *pile* ou *face* présente, par anticipation, quelques résultats intéressants.

⟨2⟩. De nombreux résultats, d'une grande profondeur, ont été établis *avant* (ou *sans*) le cadre axiomatique désormais universellement utilisé. Le lecteur est très vivement incité à lire le merveilleux ouvrage de William Feller [32], totalement dénué de théorie de la mesure.

⟨3⟩. Le lecteur pressé d'en découdre avec des définitions plus formelles peut la sauter ; on trouvera des renvois aux exemples importants qui s'y trouvent dans le texte principal.

⟨4⟩. Pour la partie II, seules la théorie des séries et les rudiments de calcul différentiel et intégral sont nécessaires.

Les parties III et IV font parfois référence à l'intégrale de Lebesgue, sans qu'une connaissance approfondie du sujet soit nécessaire ; notamment, la construction explicite de l'espérance est effectuée sans appel à des connaissances extérieures. Dans cet esprit, nous avons réduit l'importance de l'utilisation des fonctions caractéristiques, sans tout à fait les supprimer.

- La partie III généralise, de manière plus théorique, les résultats de la partie précédente. On y présente la construction générale de l'espérance d'une variable aléatoire, permettant de prouver différentes propriétés admises pour les variables aléatoires à densité, et permettant également de « passer à la limite ». (Deux chapitres peuvent être omis en première lecture : celui sur les fonctions caractéristiques et celui sur les vecteurs gaussiens.) Cette partie est plus du niveau de fin de cycle de licence ou de début de maîtrise, et pourra intéresser également les candidats au concours de l'Agrégation externe.
- La partie IV présente les « théorèmes limites » : après avoir abordé la notion générale de convergence, on étudie les lois de type « zéro-un », les lois des grands nombres et le théorème limite central.
- La partie V présente des applications diverses des probabilités, et les chapitres sont totalement indépendants les uns des autres. Le choix des sujets reflète sans doute davantage les goûts de l'auteur qu'autre chose. Nous conseillons entre autres au lecteur de lire le chapitre sur la simulation informatique d'une loi de probabilités, et de jouer avec un ordinateur...

Nous n'avons pas cherché à *unifier* cette présentation succinte de la vaste théorie des probabilités ; au contraire, nous avons cherché à en *diversifier* les points de vue. Ainsi, certaines notions peuvent être définies jusqu'à trois ou quatre fois, selon le degré de généralité ou d'abstraction cherché, selon le but que l'on recherche[5], voire selon le public visé[6]. Un désagrément possible pour le lecteur est de devoir lire, parfois, des explications trop détaillées de passages qu'il jugera triviaux, à côté de passages nettement plus difficiles — signalés comme tels par une taille de caractères plus petite, ou par un astérisque ($*$).

Enfin, dernière chose, mais non des moindres, nous avons essayé d'*illustrer* le texte au maximum ; nous accueillerons avec beaucoup de gratitude toute remarque, suggestion ou proposition d'ajout concernant les figures.

Un *index*, que nous espérons le plus complet possible, permet de s'y retrouver. Les entrées peuvent être multiples (par exemple, la notion de *convergence en loi* peut être recherchée aussi bien à l'entrée *Convergence* qu'à celle de *Loi*).

Le symbole de la main qui écrit « ✍ », dans la marge extérieure du texte, informe le lecteur de l'existence d'un exercice proche de ce qui vient d'être dit, et ✍0.1
qui peut être traité sur-le-champ. Les exercices sont regroupés en fin de chapitres, et suivis, la plupart du temps, d'indications et/ou d'une correction détaillée.

- Les paragraphes du texte principal sont numérotés en continu, de § 1 à § 445.
- Les paragraphes des annexes sont également numérotés en continu, de A1 à A80.

Rosencrantz et Guildenstern § 4

Un dernier mot : lors d'expériences (de pensée) mettant en scène deux protagonistes, ceux-ci seront conventionnellement appelés Rosencrantz et Guildenstern, en référence à une pièce de Tom Stoppard, *Rosencrantz and Guildenstern are dead* [91]. La scène initiale de la pièce représente nos deux héros — personnages

⟨5⟩. Par exemple, une définition abstraite de l'espérance d'une variable aléatoire telle que celle donnée à la page 311 possède un haut degré de généralité. Elle ravira ceux qui y verront un parallèle avec la théorie de l'intégration selon Lebesgue. Mais elle n'est pas effective, au sens où elle ne permet pas de calculer cette espérance de manière simple. Une autre définition, utilisant l'intégrale de Stieltjes, permettra d'enrichir ce point de vue.

⟨6⟩. Bien que les probabilistes usent de préférence de la fonction de répartition — et ils ont bien raison — les physiciens préféreront sans doute utiliser la densité de probabilité, fût-elle définie au sens des distributions — et ils ont raison également.

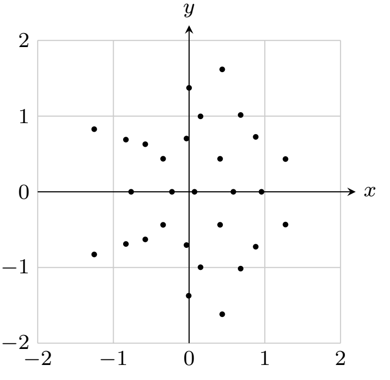
mineurs de *Hamlet* — en train de disputer une interminable partie de *pile* ou *face*, dont tous les tirages se soldent par un *face* et le passage d'une pièce de la bourse de Guildenstern à celle de Rosencrantz.

EXERCICES

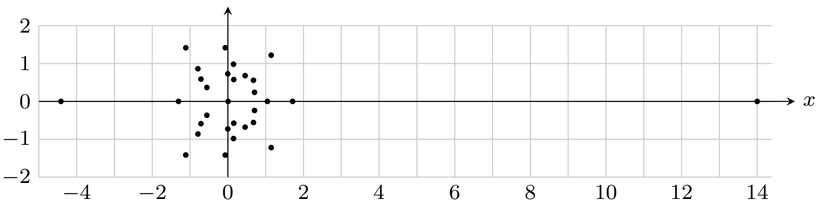
♦ ***Exercice 0.1*** Expliquer qualitativement l'allure de la matrice de droite dans la figure 0.1 : pourquoi ce motif écossais ? Pourquoi la matrice est-elle d'aspect plus terne que la précédente ?

Indications

♢ *Indication 0.1 :* La matrice M initiale a de grandes chances d'être diagonalisable (en tant que matrice complexe). Voici son spectre dans le plan complexe.



Que devient le spectre lorsque l'on calcule l'inverse de la matrice ? Et notamment, que deviennent les « petites » valeurs propres ? La figure ci-dessous est représentative...



Chapitre 1

Probabilités

(approche heuristique)

Hasard ?
Mets que font les fripons pour les sots qui le mangent.
Point de hasard !

Victor Hugo
Ruy Blas*, acte IV, scène* VII.

Ce chapitre, ainsi que le suivant, présente un panorama rapide du langage et des concepts les plus importants dans la théorie des probabilités :

- *l'univers des possibles, qui est la collection de toutes les « possibilités de réalisation du hasard » ;*
- *notion d'événement — une partie de l'univers des possibles, dont on va quantifier l'importance, soit par comptage, soit par une mesure plus sophistiquée ;*
- *notion de probabilité conditionnée par un événement, et notion d'indépendance d'événements.*

Des exemples simples sont présentés, ainsi qu'un premier exemple non trivial, permettant de modéliser une succession infinie de tirages à pile *ou* face *— expérience que l'on peut qualifier de fondamentale dans l'approche théorique des probabilités.*

1.1 LE LANGAGE DE L'ALÉATOIRE

Phénomènes aléatoires § 5

On parle de phénomène aléatoire lorsque, en recommençant une expérience dans des conditions aussi semblables que possible, le résultat de cette expérience est variable et échappe à toute prévision absolue. À ce titre, le jeu de dé est l'archétype même de l'expérience que l'on associe au hasard[1].

⟨1⟩. Le nom latin du dé, *alea*, a donné le terme « aléatoire ». Le mot arabe *az-zahr*, signifiant « le dé » et passant par l'espagnol *azar*, a lui-même conduit à « hasard ». Quant à la manière

Chapitre 2

Variables aléatoires

(approche heuristique)

Ce calcul délicat s'étend aux questions les plus importantes de la vie, qui ne sont en effet, pour la plupart, que des problèmes de probabilité.

Pierre-Simon, marquis de Laplace,
dédicace (à Napoléon) de sa Théorie analytique des probabilités, *1812.*

Pour décrire une quantité X *pouvant prendre des valeurs « aléatoires », il suffit de définir une fonction* X *sur l'ensemble* Ω*. Ainsi, à chaque « possibilité du hasard »* ω*, la quantité* $X(\omega)$ *est déterminée.*

Contrairement à ce qui se passe souvent en analyse, ce n'est pas X *en tant que fonction qui présente un intérêt. Les notions usuelles de continuité ou de dérivabilité, centrales en analyse, n'ont ici aucun sens, puisque l'on n'a pas défini* a priori *de notion de « proximité » entre les* ω*, c'est-à-dire de topologie sur* Ω*. D'ailleurs, la plupart du temps,* Ω *est inconnu et on ne se soucie pas de le définir correctement : tel le système d'exploitation de qualité, il travaille en tâche de fond et se fait oublier de l'utilisateur. Pour le probabiliste, ce qui compte est : avec quelle fréquence* X *prend-elle telle ou telle valeur ? On cherche ainsi à répondre à des questions du type :*

- *quelle est la probabilité que* $X(\omega)$ *prenne ses valeurs dans l'intervalle* $[\,a\,;\,b\,]$ *?*
- *quelle est la probabilité que* $X(\omega)$ *soit égale précisément à* 0 *?*
- *quelle est la probabilité que* $\bigl|X(\omega)\bigr| > 42$ *?*
- *ou plus généralement, si* A *est une partie de* $\mathbb{R}$*, quelle est la probabilité que* $X(\omega)$ *soit dans* A *?*

On résume l'ensemble de ces question sous la formule : comment les valeurs prises par X sont-elles distribuées ? *La donnée quantitative de cette propriété s'appelle la* **loi** *(de distribution) de* X*. Nous verrons — chose remarquable — qu'elle est entièrement déterminée par la réponse à la question : pour chaque réel* x*, quelle est la probabilité que* $X(\omega)$ *soit inférieur ou égal à* x *?*

Chapitre 3

Espaces probabilisés

Si les mathématiques — système spécialisé de quelques signes, fondé sur l'intelligence et gouverné par elle — impliquent des situations insaisissables, et sont l'objet de permanentes discussions, que dire des obscurités du langage, amas confus de milliers de symboles maniés presque au hasard ?

Jorge Luis BORGES, La jouissance littéraire

Le formalisme désormais employé dans la théorie des probabilités est celui que Kolmogorov introduisit dans ses Méthode analytiques de la théorie des probabilités *[60] de 1931, et surtout dans son opuscule* Fondements de la théorie des probabilités *[61] paru en 1933*⟨1⟩*; bien que cette axiomatisation soit aujourd'hui d'un usage bien établi*⟨2⟩*, elle mit longtemps à s'imposer, et ne fut guère connue avant les années 50.*

L'un des grands mérites de Kolmogorov fut d'avoir fourni un cadre entièrement abstrait à la théorie — qui n'est mise en parallèle avec l'expérience commune que dans le cas des probabilités finies —, cadre qui permet la généralisation de quelques notions intuitives et simples à des situations où, a priori, *aucun calcul ne semblait possible. Pour cela, il fait en permanence appel à des éléments de théorie des ensembles, et notamment à la notion de* tribu *(ou σ-*algèbre*), déjà évoquée au chapitre 1.*

Dans ce chapitre, nous passons en revue le vocabulaire nécessaire à la bonne compréhension du reste de l'ouvrage ; le lecteur est invité à parcourir, sans forcément s'y attarder en première lecture, les grandes lignes de ce formalisme — mais à s'y reporter chaque fois que le besoin s'en fera ressentir. Les points les plus importants sont signalés, en marge, par un symbole « ▶ » ou « ◀ ». Au contraire, certains passages signalés par un astérisque ($*$) peuvent être omis en première lecture.

⟨1⟩. Ce petit livre est encore très lisible malgré son âge et en dépit de notations surprenantes pour le lecteur d'aujourd'hui, comme $\underset{n}{\mathfrak{S}}\,\mathrm{A}_n$ pour l'union, ou $\underset{k}{\mathfrak{D}}\,\mathrm{A}_k = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ pour l'intersection. La structure de la présentation a manifestement influencé un nombre incalculable d'ouvrages sur le sujet ! L'influence considérable de Kolmogorov en mathématiques est présentée de manière très agréable dans l'ouvrage de Charpentier, Lesne et Nikolski [16].

⟨2⟩. Ce qui n'empêche pas d'autres types de présentation ; l'excellent ouvrage de Rényi [82] propose une approche alternative des espaces probabilisés, en prenant comme modèle de base les espaces de probabilités conditionnelles, dont les espaces usuels de Kolmogorov ne sont que des cas particuliers.

Chapitre 4

Conditionnement

On a une chance sur dix mille, quand on prend un avion, qu'il y ait une bombe à l'intérieur. Mais on n'a qu'une chance sur cent millions qu'il y en ait deux. Alors, pour plus de sécurité, emportez votre bombe.

Notre intuition des probabilités est souvent basée sur des probabilités conditionnées par un événement (« quelle est la probabilité qu'il pleuve aujourd'hui sachant qu'on est en novembre » n'obtient pas la même réponse que la même question « sachant qu'on est en juin »). La formalisation d'une probabilité conditionnelle, pour aisée qu'elle soit, permet d'établir les premiers outils de calcul de la trousse de survie du probabiliste (occasionnel ou enragé) :

- *formule des probabilités composées ;*
- *formule des probabilités totales ;*
- *théorème de Bayes.*

Probabilités conditionnelles § 58

Soit $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Si A est un événement, on souhaite donner un sens à « la probabilité qu'un événement B soit réalisé, *sachant* que A est réalisé », comme il a été présenté dans le chapitre 1. On ne s'intéresse qu'aux expériences dont le résultat réalise A, les autres étant purement et simplement écartées du décompte. Sous ces conditions, B est réalisé si et seulement si $A \cap B$ l'est. Tout se passe comme si l'on choisissait le nouvel univers $\Omega' := A$ et qu'on le munissait d'une nouvelle probabilité $\mathbf{P}_A$, telle que $\mathbf{P}_A(B)$ soit proportionnelle à $\mathbf{P}(A \cap B)$. Pour cela, il est donc nécessaire de supposer que $\mathbf{P}(A) > 0$⟨1⟩, et la condition de normalisation $\mathbf{P}_A(A) = 1$ mène naturellement à la définition qui suit⟨2⟩.

Définition 4.1 Soit A un événement de probabilité non nulle : $\mathbf{P}(A) > 0$. Pour tout événement B, on définit la **probabilité conditionnelle de B sachant A** comme le réel, noté $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B \mid A)$, valant

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B \mid A) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

⟨1⟩. Le cas où $\mathbf{P}(A) = 0$ est beaucoup plus délicat à gérer ; des techniques spécifiques sont expliquées au chapitre 23.

⟨2⟩. On notera que l'univers est toujours Ω, et non A ; tout ce qui est en dehors de A est cependant considéré comme *négligeable*.

Chapitre 5

Indépendance (1/2)

Les chiffres sont dénués de toute imagination, tu devrais donc te garder de leur accorder trop d'importance.

Jón Kalman Stefánsson, *Entre ciel et terre*

D'une certaine manière, la notion d'indépendance est la *notion qui fait que la théorie des probabilités ne se réduit pas à un cas particulier de la théorie générale des espaces mesurés, et a développé, au cours de plus de trois siècles d'existence, ses méthodes propres.*

5.1 INDÉPENDANCE D'ÉVÉNEMENTS ET DE TRIBUS

Indépendance de deux événements § 63

D'un point de vue intuitif, si un événement A semble n'avoir pas d'effet, du point de vue probabiliste, sur un événement B, alors on s'attend à ce que le calcul de la probabilité de B, conditionné par la connaissance de la réalisation (ou non) de l'événement A, conduise au même résultat que le calcul absolu de cette même probabilité, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}(\mathrm{B} \,|\, \mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B} \,|\, \mathrm{A}^c) = \mathbf{P}(\mathrm{B}).$$

Multipliant cette égalité par la probabilité de A, on obtient $\mathbf{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B})\,\mathbf{P}(\mathrm{A})$; cette dernière forme est sans doute meilleure que la première, car elle est symétrique et met sur le même plan les événements A et B. De plus, elle ne fait pas appel à une probabilité conditionnelle pour laquelle le cas $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 0$ est problématique.

Exemple 5.1 (Cas fini : nombre de cas favorables sur nombre de cas total) Revenons au cas, extrêmement simple, mais fondateur du raisonnement sur les probabilités, où Ω est un ensemble fini de cardinal N, muni d'une probabilité uniforme. À un événement A de cardinal k, on associe la probabilité $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = k/\mathrm{N}$ (nombre de cas favorables sur nombre de cas total).

Dire que les événements A et B sont indépendants revient à dire que la connaissance de la réalisation (ou non) de A n'influe pas sur la probabilité de B, conditionnée par cette réalisation : en d'autres termes, que les rapports

$$\frac{\text{nombre de cas où B est réalisé en même temps que A}}{\text{nombre de cas où A est réalisé}}$$

Chapitre 6

Variables aléatoires discrètes

Les variables ne prenant qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs jouent un rôle particulier dans la théorie des probabilités : outre qu'elle sont naturelles dans les problèmes de dénombrement, elles permettent également de comprendre et de démontrer de nombreux résultats généraux de la théorie des probabilités sans avoir recours aux outils sophistiqués de la théorie de la mesure.

Les trois chapitres qui suivent traitent de ces variables, du point de vue théorique comme du point de vue pratique.

6.1 VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé ; de plus, les variables aléatoires considérées seront toujours, sans que l'on prenne la peine de le préciser, à valeurs réelles.

Variable simple, variable discrète § 70

Soit $(\Omega, \mathfrak{T})$ un espace probabilisable (qui pourra la plupart du temps être considéré comme un ensemble fini ou dénombrable muni de sa tribu la plus riche, à savoir $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}(\Omega)$). Une **variable aléatoire (réelle) discrète** sur $(\Omega, \mathfrak{T})$ est une variable aléatoire X telle que $\mathrm{X}(\Omega)$ est un ensemble réel fini ou dénombrable. On dit que X est une **variable aléatoire simple** si $\mathrm{X}(\Omega)$ est un ensemble fini.

L'ensemble $\mathrm{X}(\Omega)$ est appelé **univers-image** ou **ensemble des valeurs prises par X** ou **ensemble des réalisations de X** ; on le notera génériquement

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{x_k \ ; \ k \in \mathrm{K}\}$$

où $\mathrm{K} = \{1, 2, \ldots, n\}$ si $\mathrm{X}(\Omega)$ est un ensemble fini, et $\mathrm{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathrm{K} = \mathbb{N}^*$ si $\mathrm{X}(\Omega)$ est strictement dénombrable.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour toute partie $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, on note

$$\{\mathrm{X} = x\} = \mathrm{X}^{-1}\big(\{x\}\big) = \big\{\omega \in \Omega \ ; \ \mathrm{X}(\omega) = x\big\}$$

et

$$\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\} = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}) = \big\{\omega \in \Omega \ ; \ \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{A}\big\}.$$

La probabilité associée à ces événements sera notée $\mathbf{P}\{\mathrm{X} = x\}$ et $\mathbf{P}\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}$ plutôt que $\mathbf{P}\big(\{\mathrm{X} = x\}\big)$ et $\mathbf{P}\big(\{\mathrm{X} \in \mathrm{A}\}\big)$.

Chapitre 7

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Voici enfin les notions d'espérance, de moments, de variance, ainsi que les premières grandes inégalités (Bienaymé-Tchebychev et Cauchy-Schwarz) qui jouent un rôle central dans toute la théorie des probabilités. Dans le cas d'une variable discrète, ces notions ne présentent pas de difficulté théorique, et les diverses propriétés que nous pouvons démontrer rigoureusement dans ce cas particulier sont en fait des propriétés qui restent vraies en toute généralité, mais qui sont alors plus difficiles à démontrer.

Nous introduisons également les fonctions génératrices associées aux variables à valeurs entières, naturelles dans les problèmes de comptage.

Pour terminer, nous appliquons les outils présentés à un problème bien connu, celui du collectionneur de vignettes.

7.1 ESPÉRANCE

Espérance § 83

La notion d'*espérance mathématique* d'une variable aléatoire généralise celle de *moyenne pondérée* que même les moins matheux connaissent — qui, enfant, n'a pas calculé sa moyenne trimestrielle en tenant en compte des coefficients de chaque matière ? Soit X une variable aléatoire **simple**, c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec des probabilités respectives $p_k = \mathbf{P}\{\mathrm{X} = x_k\}$, où bien entendu $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. La moyenne pondérée de ces valeurs, notée $\mathbf{E}(\mathrm{X})$, est appelée **espérance (mathématique)** de X :

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k.$$

Exemple 7.1 Considérons un univers Ω et une partition finie $\Omega = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$ de cet univers. On suppose que X prend la valeur a sur A, la valeur b sur B et la valeur c sur C. On suppose de plus que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1/3$, $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 1/2$ et $\mathbf{P}(\mathrm{C}) = 1/6$. Alors

Chapitre 8

Couples de variables aléatoires discrètes

L'exemple le plus simple de vecteur aléatoire est donné par un couple (X, Y) *de variables aléatoires discrètes. Étudier la loi d'un tel couple revient donc à déterminer les probabilités élémentaires notées indifféremment*

$$\mathbf{P}\{X = x, Y = y\}, \qquad \mathbf{P}\big(\{X = x\} \cap \{Y = y\}\big) \quad \textit{ou} \quad \mathbf{P}\big\{(X, Y) = (x, y)\big\}.$$

- *Dans une première partie, nous relions la loi du couple aux* lois marginales*, qui sont les lois des seules variables* X *ou* Y *; nous étudions également la loi de variables de la forme* $\varphi(X, Y)$.
- *Nous nous concentrons ensuite sur le cas particulier des variables indépendantes, notamment sur l'espérance* $\mathbf{E}(XY)$ *de leur produit et sur la loi de leur somme* $X + Y$.
- *Nous enchaînons sur l'étude de la covariance d'un couple et sur la définition de son coefficient de corrélation.*
- *Enfin, nous abordons la notion d'espérance conditionnelle qui, dans le cas de variables discrètes, ne pose aucune difficulté théorique. Cette thématique sera reprise dans le suite (chapitre 23).*
- *Pour terminer le chapitre, on traite un exemple de sommation d'un nombre aléatoire de variables aléatoires, avec application à l'étude de l'extinction d'une espèce ou d'un nom de famille.*

Position du problème § 105

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ et on suppose que l'on a deux variables aléatoires réelles discrètes, X et Y. Connaître la loi de X et la loi de Y ne permet pas, en général, de déterminer la probabilité que le couple (X, Y) prenne une valeur (x, y) donnée.

Donnons un exemple. On définit l'univers Ω comme étant $\mathbb{Z}_3^2$, c'est-à-dire $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$, et on suppose que l'on connaît deux variables aléatoires X et Y de même loi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} = 0,3 \\
\mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{Y = 1\} = 0,5 \\
\mathbf{P}\{X = 2\} = \mathbf{P}\{Y = 2\} = 0,2
\end{aligned}$$

Chapitre 9

Interlude : le jeu de pile ou face

Dans ce chapitre, nous explorons quelques propriétés élémentaires du jeu de pile *ou* face*. Après avoir défini un espace probabilisé permettant de modéliser une succession infinie de tirages, on s'intéresse à la loi de la longueur de séquences homogènes, puis à un jeu consistant à parier sur la sortie d'une séquence particulière (PPF) avant une autre (FPP). Cela nous permet d'aborder la théorie des événements régénératifs. Enfin, nous terminons par un parallèle entre les suites de tirages à* pile *ou* face *et les probabilités continues,* via *le théorème de Borel sur les nombres normaux, parallèle qui mènera à deux conclusions :*

- *une suite de variables de Bernoulli indépendantes ou un réel de* $[\,0\,;\,1\,[$*, c'est (presque) pareil ;*
- *il est possible de prouver (avec une certitude absolue, et non pas presque sûrement) l'existence de nombres possédant certaines propriétés, en utilisant l'attirail des probabilités, et ce bien qu'aucune des propriétés calculées n'ait un quelconque rapport avec le hasard.*

9.1 FORMALISATION

Espace probabilisé associé à une partie infinie de *pile* ou *face* § 131

Par convention, les lettres P et F représentent l'issue d'un tirage à *pile* ou *face* ; on les identifiera conventionnellement avec les valeurs numériques $\mathrm{P} = 1$ et $\mathrm{F} = 0$, ou avec des notions de succès (P = succès, F = échec).

On modélise l'expérience consistant à tirer une infinité de fois à *pile* ou *face* par l'espace $\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^{\mathbb{N}^*}$, que l'on munit d'une tribu $\mathfrak{T}$ et d'une probabilité $\mathbf{P}$ définie sur cette tribu. Un élément ω de Ω est donc une suite

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \qquad \omega_k \in \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}.$$

Avant de déterminer quelle tribu choisir, on s'accorde d'abord sur les « événements » dont on exige, *a minima*, qu'ils soient dans $\mathfrak{T}$. Par exemple, on aimerait pouvoir parler de l'ensemble des parties telles que le troisième tirage est *pile* et le cinquième *face*.

Chapitre 10

Variables aléatoires à densité

En l'absence (temporaire) d'une théorie de la mesure et, notamment, de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que du cortège de théorèmes d'intégration qui lui est associée, les trois chapitres qui suivent, et qui traitent tous de variables à densité, présentent un certain nombre de résultats non démontrés, mais justes (!) ; l'accent est mis sur la pratique. La théorie justifiant les méthodes proposées fait l'objet des chapitres 13 à 15.

Dans ce chapitre,

- *nous définissons les variables à densité (qu'on appelle aussi* variables absolument continues*) ;*
- *nous présentons les lois classiques (uniforme, exponentielle et normale, notamment) ;*
- *enfin, nous établissons les formules utiles lors d'un changement de variable aléatoire* $Y = \varphi(X)$.

À propos de l'intégrabilité des fonctions § 144

Nous rappelons un résultat essentiel de la théorie de l'intégration : si f est une fonction à valeurs *positives* et possédant la régularité nécessaire⟨1⟩, alors on peut définir l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$:

– si f est intégrable, la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est finie ;

– si f n'est pas intégrable, $\int_{-\infty}^{+\infty} f = +\infty$.

Nous utiliserons librement cette propriété, notamment lors de la preuve de l'intégrabilité d'une fonction.

Si f est une fonction à valeurs réelles (pas forcément positives), la situation est un tout petit peu plus compliquée ; l'intégrabilité de f est équivalente à la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty.$$

Notamment, la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ peut être définie⟨2⟩ sans que la fonction f soit intégrable.

Enfin, les fonctions considérées dans ce chapitre auront toujours, même si ce n'est pas précisé, la régularité voulue pour les intégrer, au moins localement.

⟨1⟩. Selon le niveau d'abstraction et de raffinement cherché, f peut être continue par morceaux, ou mesurable et localement intégrable.

⟨2⟩. Au sens de la limite de $\int_A^B f$ quand les bornes A et B tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$.

Chapitre 11

Espérance d'une variable aléatoire à densité

Par analogie avec le cas discret, nous donnons ici une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité. La plupart des propriétés de l'espérance — linéarité, formule de transfert — sont provisoirement admises. Elles seront toutes justifiées dans le chapitre 14, qui requiert une approche théorique plus élaborée. Ici,l'accent est mis sur l'utilisation pratique de ces propriétés.

11.1 ESPÉRANCE ET MOMENTS

Espérance § 163

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la notion d'espérance généralise, pour une variable aléatoire quelconque, la notion de moyenne d'une variable aléatoire finie. Reprenons un point de vue « heuristique[1] ». Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. La probabilité $\mathrm{d}p$ que la variable X soit comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ est $\mathrm{d}p \approx f(x)\,\mathrm{d}x$; en sommant les valeurs de X pondérées par ces probabilités, on définit la valeur moyenne de X comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les contraintes vues au paragraphe § 33 étant *a fortiori* encore valables, on est amenés à poser plus précisément la définition suivante :

Définition 11.1 Soit X une variable aléatoire réelle, admettant une densité f. On dit que **X admet une espérance** si la fonction $x \mapsto |x|\ f(x)$ est intégrable, ce qui revient à dire que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} x\, f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

⟨1⟩. C'est-à-dire le point de vue du physicien, ou du mathématicien de l'époque de ténèbres précédant la théorie de la mesure et son cortège de tribus, mais durant laquelle il fallait tout de même avancer.

Chapitre 12

Couples de variables à densité

Dans tout ce chapitre, nous considérons des couples (X,Y) *de variables aléatoires, ce qui revient à considérer une variable aléatoire* $\mathbf{X}=(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$*. La généralisation à des n-uplets* $(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n)$ *de variables aléatoires (ou à des variables aléatoires* $\mathbf{X}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*) est presque toujours immédiate.*

Les propriétés déjà vues pour les couples discrets sont reprises ici, et quelques cas particuliers sont mis en avant (comme la somme de variables normales indépendantes). Une approche heuristique des lois conditionnelles est proposée, avec un exemple détaillé, ainsi qu'un nouvel aperçu de l'espérance conditionnelle. Là encore, le but de ce chapitre est de faire manipuler les notions ; aussi le chapitre s'achève-t-il sur une quinzaine d'exercices, aisés pour la plupart, dont nous conseillons fortement l'étude avant de passer à la partie suivante, consacrée à des aspects plus théoriques.

12.1 LOI D'UN COUPLE

Loi d'un couple, lois marginales §174

La **fonction de répartition (conjointe)** du couple (X,Y) est la fonction $\mathrm{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\mathrm{F}(x,y)=\mathbf{P}\{\mathrm{X}\leqslant x,\mathrm{Y}\leqslant y\}$$

Elle représente la probabilité que le couple (X,Y) prenne ses valeurs dans le domaine $\Delta(x,y)$ du plan représenté sur la figure 12.1 page suivante.

La fonction F est croissante par rapport à chacune de ses variables, donc admet une limite quand $x\to\pm\infty$ ou $y\to\pm\infty$. Nous noterons $\mathrm{F}(x,+\infty)$ pour $\lim\limits_{y\to+\infty}\mathrm{F}(x,y)$ et ainsi de suite.

■ **Proposition 12.1** $\mathrm{F}(+\infty,+\infty)=1$ *et* $\mathrm{F}(x,-\infty)=\mathrm{F}(-\infty,y)=0$ *pour tous* $x,y\in\mathbb{R}$.

Démonstration : Pour *toutes* suites croissantes $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ de limites $+\infty$, on peut écrire $\mathbb{R}^2$ comme l'union croissante

$$\mathbb{R}^2=\bigcup_{n=0}^{\infty}\big\{(\mathrm{X},\mathrm{Y})\in\Delta(x_n,y_n)\big\}.$$

Chapitre 13

Variables aléatoires : cas général

Certaines variables aléatoires ne sont ni discrètes, ni absolument continues. Si la fonction de répartition de certaines de ces variables peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'une fonction de répartition discrète et d'une fonction de répartition absolument continue, le cas général mérite une étude à part entière.

Nous terminons ce court chapitre en établissant un théorème d'une grande importance : toute variable aléatoire positive est limite (au sens de la convergence simple) d'une suite croissante de variables aléatoires simples (étagées). Ce théorème permettra de construire la notion générale d'espérance d'une variable aléatoire, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ est un espace probabilisé ; en l'absence de précision, toute les variables aléatoires rencontrées sont définies sur cet espace, et à valeurs réelles.

13.1 MESURABILITÉ

Définition d'une variable aléatoire § 192

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles. Afin d'étudier la probabilité image induite par une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire de calculer la probabilité $\mathbf{P}\{X \in B\}$ pour que X prenne ses valeurs dans un borélien B de $\mathbb{R}$, il est nécessaire que les ensembles $\{X \in B\}$ soient tous éléments de la tribu $\mathfrak{T}$.

Définition 13.1 Soit $(\Omega, \mathfrak{T})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire réelle** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'événement $\{X \in B\}$ est un élément de la tribu $\mathfrak{T}$. On dit également que X est une application **mesurable** de l'espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{T})$ dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

On notera :

- $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathfrak{T})$ l'espace des applications mesurables de $(\Omega, \mathfrak{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$;
- $\mathcal{L}^0_+(\Omega, \mathfrak{T})$ l'espace des applications mesurables positives, et

Chapitre 14

L'espérance comme intégration sur une mesure de probabilité

Un des (nombreux) avantages de l'utilisation de la théorie abstraite de l'intégrale de Lebesgue en probabilités, initiée notamment par Fréchet et Kolmogorov, est de pouvoir écrire l'espérance d'une variable aléatoire $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$*, non en prenant pour objet de base l'ensemble d'arrivée (la droite* $\mathbb{R}$*), comme dans les formules*

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \mathbf{P}\{\mathrm{X} = x_n\}, \qquad \textit{ou} \qquad \mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

déjà vues pour des variables aléatoires respectivement discrètes et absolument continues, mais au contraire en partant de l'espace Ω *lui-même, selon une formule qui prendra l'allure suivante :*

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{\Omega} \mathrm{X}(\omega)\, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \qquad \textit{ou} \qquad \mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{\Omega} \mathrm{X}\, \mathrm{d}\mathbf{P}.$$

(L'intégrale est calculée sur l'ensemble Ω *grâce à la mesure de probabilité, notée* $\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)$*, selon une procédure standard qui sera brièvement présentée.) Ce changement radical de point de vue permet notamment de prouver des résultats « simples », comme la linéarité de l'espérance, qui sont quasiment indémontrables avec les formules précédentes*[1].

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$.

⟨1⟩. On peut certes prouver la linéarité de l'espérance dans le cas de variables discrètes, mais au prix de notations bien lourdes ; le cas continu a été admis.

Chapitre 15

Vecteurs aléatoires

La généralisation de couples de variables aléatoires est la notion de vecteurs aléatoires, ou encore variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Bien que l'on puisse travailler dans un espace vectoriel euclidien de dimension n quelconque, nous supposerons toujours que celui-ci est égal à $\mathbb{R}^n$, et nous identifierons donc un vecteur $\mathbf{X}$ à un n-uplet $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ de variables aléatoires.

Après une rapide étude de la manière dont on munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace probabilisé, nous introduisons la notion de matrice de covariance d'un vecteur aléatoire, puis le théorème de Fubini permettant de calculer des intégrales multiples en se ramenant à n intégrales simples, sous des hypothèses simples. La dernière partie du chapitre concerne les changements de variables aléatoires — permettant, par exemple, d'étudier la loi d'un couple (U, V), image d'un autre couple (X, Y) de loi connue par une application $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Notations § 227

Dans tout ce chapitre, l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique

$$\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

et identifié à l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes ; le contexte permet de trancher. Il est muni de son produit scalaire canonique défini par

$$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$$

en écrivant (abusivement)

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'alors, pour tous vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, et pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \boldsymbol{x} | \mathrm{A}\boldsymbol{y} \rangle = \left\langle {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}\boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{y} \right\rangle. \tag{15.1}$$

Chapitre 16

Indépendance (2/2)

La notion d'indépendance d'une famille d'événements permet de définir, de manière très générale, celle d'indépendance d'une famille de variables aléatoires quelconques. Des outils théoriques et des méthodes pratiques sont exposés ici concernant cette notion, avec des applications à la somme et au produit de variables aléatoires indépendantes.

Enfin, nous terminons ce chapitre par une introduction à la notion de temps d'arrêt*, permettant de généraliser l'identité de Wald, déjà rencontrée au chapitre 8.*

16.1 INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Indépendance de deux variables aléatoires § 239

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si, pour tous événements A et B,

$$\mathbf{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbf{P}\{X \in A\} \cdot \mathbf{P}\{Y \in B\}.$$

Cette définition mettant en jeu des événements du type $\{X \in A\}$, où A est un borélien, on introduit la notion de tribu engendrée par une variable aléatoire.

Définition 16.1 Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. La **tribu engendrée par X**, notée $\sigma(X)$, est l'ensemble des événements de la forme $\{X \in A\}$, où A décrit l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$. C'est bien sûr une tribu.

Remarque 16.2 La tribu $\sigma(X)$ est donc, par construction, la plus petite tribu par rapport à laquelle la variable aléatoire X est mesurable. En effet, une telle tribu contient nécessairement tous les $\{X \in A\}$ pour $A \in \mathfrak{B}$, donc contient $\sigma(X)$.

Définition 16.3 Deux tribus $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ sont dites **indépendantes** si, quels que soient les événements $A_1 \in \mathfrak{T}_1$ et $A_2 \in \mathfrak{T}_2$, ces événements sont indépendants :

$$\forall A_1 \in \mathfrak{T}_1 \quad \forall A_2 \in \mathfrak{T}_2 \qquad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2).$$

Chapitre 17

Fonctions caractéristiques

Dans ce chapitre, nous présentons la définition et les principales propriétés de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Il y a finalement peu de « vraies » probabilités présentes, seulement de la belle analyse assez standard, ce pourquoi nous ne nous attardons guère sur le sujet.

Cependant, les fonctions caractéristiques sont un outil d'une grande puissance dont on se passe difficilement, notamment lors de l'étude de la convergence de variables aléatoires ; elles permettent également une démonstration assez simple du théorème limite central. Le lecteur pressé peut se contenter, dans un premier temps, de parcourir les propriétés les plus importantes : théorème d'unicité, fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Variables aléatoires complexes § 252

Nous pouvons généraliser dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes les notions de variable aléatoire (c'est-à-dire de fonction mesurable) et d'espérance.

Munissons tout d'abord $\mathbb{C}$ d'une tribu, en identifiant dans un premier temps le plan complexe au plan réel $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, où A et B sont des boréliens, n'est pas une tribu. On note $\mathfrak{B}^2$ ou $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ la tribu engendrée par l'ensemble de ces parties ; c'est une tribu sur $\mathbb{R}^2$, appelée **tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^2$**. On peut vérifier⟨1⟩ que cette tribu est également engendrée par les rectangles de $\mathbb{R}^2$. On la note également **$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$**, l'espace $\mathbb{R}^2$ étant vu explicitement comme le plan complexe $\mathbb{C}$.

Soit X une **variable aléatoire complexe**, c'est-à-dire une application $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable par rapport aux tribus $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Séparons la partie réelle de la partie imaginaire : il suffit, pour tout $\omega \in \Omega$, d'écrire $\mathrm{X}(\omega)$ sous la forme $\mathrm{Y}(\omega) + \mathrm{i}\mathrm{Z}(\omega)$ où $\mathrm{Y}(\omega)$ et $\mathrm{Z}(\omega)$ sont tous deux réels. On définit ainsi deux applications Y et Z vérifiant $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{i}\mathrm{Z}$. Ce sont les images de l'application mesurable X par les fonctions continues « partie réelle » et « partie imaginaire », elles sont donc également mesurables⟨2⟩ : ce sont des variables aléatoires.

Si Y et Z admettent toutes deux une espérance, on définit l'**espérance** de X comme

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) := \mathbf{E}(\mathrm{Y}) + \mathrm{i}\mathbf{E}(\mathrm{Z}).$$

⟨1⟩. Voir l'annexe B pour plus de détails.

⟨2⟩. Corollaire 13.6 page 293.

Chapitre 18

Vecteurs gaussiens (*)

Les vecteurs gaussiens, généralisation naturelle à $\mathbb{R}^d$ des lois normales sur $\mathbb{R}$, sont présentés en deux temps. D'abord sur $\mathbb{R}^2$, dans une approche assez pédestre ; quelques aspects numériques (droites de corrélation, ellipses d'égale densité,...), utiles en physique ou en traitement du signal, sont abordés. Sur $\mathbb{R}^d$ ensuite, de manière plus théorique, où l'on caractérise un vecteur gaussien $\mathbf{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_d)$ par le fait que $\langle \boldsymbol{u} | \mathbf{X} \rangle$ suit une loi normale pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^d$.

18.1 LOIS NORMALES SUR $\mathbb{R}^2$

Lois normales et extension § 262

La loi normale $\mathscr{N}\left(m\ ;\ \sigma^2\right)$ sur $\mathbb{R}$ (on dit aussi loi gaussienne **univariée**), d'espérance m et de variance σ^2 admet pour densité

$$\mathfrak{n}_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2}. \tag{18.1}$$

Cette loi est d'une importance fondamentale en théorie des probabilités et dans ses applications, notamment en statistiques. En effet, comme le montre le théorème central limite, la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi, correctement renormalisée, suit approximativement une loi normale, et ce, *quels que soient les détails de la loi commune à ces variables* ; quelques hypothèses simples sont simplement requises, comme l'existence d'un moment d'ordre 2. Afin d'inclure tous les cas de figure, on peut également définir la **loi normale dégénérée** $\mathscr{N}(m\ ;\ 0)$, de variance nulle, comme la loi certaine de valeur m (ou **mesure de Dirac** en m), dont la fonction de répartition vaut $\mathrm{F}(x) = 0$ si $x < m$ et $\mathrm{F}(x) = 1$ si $x \geqslant m$⟨1⟩.

Cette fâcheuse dichotomie entre lois normales de variances strictement positives (continues, et admettant une densité) et dégénérées (discontinues, et n'en

⟨1⟩. Par définition de la convergence en loi (§ 286), on a convergence en loi de $\mathscr{N}\left(m\ ;\ \sigma^2\right)$ vers $\mathscr{N}(m\ ;\ 0)$ lorsque $\sigma \to 0$. On remarquera que, au sens des distributions, l'expression (18.1) converge vers la distribution de Dirac en m.

Chapitre 19

Convergence

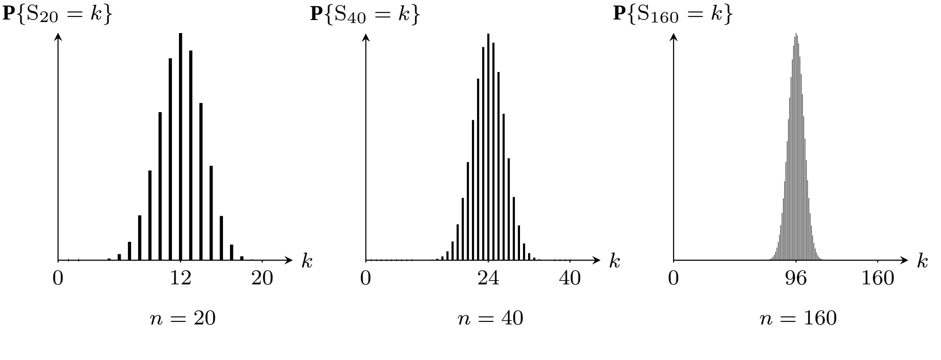
On introduit dans ce chapitre les principales notions de convergence de suites de variables aléatoires : convergence presque sûre, convergence en probabilité, convergence en loi. Les relations, parfois subtiles, entre ces notions, sont développées, et des critères simples les caractérisant sont exposés.

Ce chapitre est, par essence, très technique. Il est cependant important de s'y plonger un temps suffisant pour bien se pénétrer des techniques exposées. Plus que tout autre chapitre, celui-ci doit être lu un crayon à la main. Le minimum syndical *à connaître pour pouvoir aborder les lois des grands nombres et le théorème limite central sont indiqués par un ou deux symboles « ◀ » en marge.*

Afin de faire oublier un peu l'aridité du sujet, on termine par deux applications simples. Dans la première, on montre que, dans les espaces euclidiens de grande dimension, presque tous les vecteurs sont presque orthogonaux. *Dans la seconde, on étudie une propriété caractérisant les suites de réels dont la partie décimale est équidistribuée sur* $[\,0\,;\,1\,[$.

Introduction aux théorèmes limites § 276

Nous avons déjà rencontré plusieurs résultats typiques de ce que l'on appelle des *théorèmes limites*, notamment dans le cas d'une succession infinie de tirages à *pile* ou *face*. Ci-dessous, nous représentons l'histogramme de la loi du nombre de *pile* obtenu lors de n tirages : $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n$, où X_k est la variable valant 1 si le k-ième tirage amène *pile* et 0 sinon (la probabilité d'obtenir *pile* étant ici $p = 0,6$).



Chapitre 20

Loi des grands nombres

GUILDENSTERN (Flips a coin) *: The law of averages, if I have got this right, means that if six monkeys were thrown up in the air for long enough they would land on their tails about as often as they would land on their —*

ROSENCRANTZ *: Heads.* (He picks up the coin.)

Tom STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead*[1].

Ce chapitre présente deux grands résultats sur les suites de variables aléatoires.

- *Le premier est la loi du zéro-un (ou loi du tout-ou-rien) de Kolmogorov, qui stipule qu'un événement ne dépendant que de manière asymptotique d'une suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ *quelconque de variables aléatoires, est nécessairement de probabilité* 0 *ou* 1.
- *Le second est la très fameuse loi des grands nombres, déclinée dans plusieurs versions, et dont l'importance n'est plus à souligner. C'est le théorème qui permet notamment de relier la probabilité abstraite à la « fréquence limite du nombre de cas favorables sur le nombre total de cas » lorsque l'on répète une expérience un grand nombre de fois. Une démonstration relativement élémentaire de la version « forte » de ce théorème est donnée en annexe.*

20.1 LA LOI DU TOUT OU RIEN (OU DU 0–1) (∗)

Événements de queue, tribu asymptotique § 302

Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires ; on appelle **événement de queue** associé à cette suite tout événement qui peut être déterminé par l'ensemble des valeurs prises par cette suite, mais qui n'est pas modifié lorsque l'on change arbitrairement un nombre fini de ces valeurs. En d'autres termes, un événement de queue est un événement qui est entièrement déterminé par le comportement asymptotique de la suite des valeurs de $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$.

⟨1⟩. GUILDENSTERN *(Lance une pièce)* : D'après la loi des grands nombres, si j'ai bien compris, si on lance six singes un grand nombre de fois, ils retomberont sur leurs fesses à peu près aussi souvent que sur leur —

ROSENCRANTZ : Face. *(Il ramasse la pièce.)*

Chapitre 21

Le théorème limite central

Le célèbre théorème limite central permet d'aller au-delà du résultat de la loi des grands nombres : si $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance* m *et une variance* σ^2*, alors les fluctuations de la moyenne* $\mathrm{M}_n = (\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n)/n$ *autour de* m *se font sur une échelle typique en* $\sigma/\sqrt{n}$ *et suivent, asymptotiquement, une loi précise : la loi normale* $\mathscr{N}\big(0\ ;\ \sigma^2/n\big)$*. En d'autres termes, on peut approcher la loi de* $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n$ *par la loi normale* $\mathscr{N}\big(nm\ ;\ n\sigma^2\big)$*.*

D'autres formes du théorème permettent aux variables X_n *de suivre des lois différentes, à condition que leurs variances ne deviennent pas trop petites.*

Les conséquences de ce théorème fondamental sont innombrables, et tout d'abord en statistiques : si l'on ajoute des quantités inconnues mais indépendantes, la résultat est (presque) une loi normale !

En conclusion du chapitre, nous présentons un résultat connu sous le nom de loi du logarithme itéré*, qui permet d'encadrer les fluctuations de* $\mathrm{S}_n/\sqrt{n}$*.*

Au-delà de la loi des grands nombres § 313

Dans le paragraphe § 276, nous avons vu l'évolution de la loi du nombre de *pile* obtenus au cours d'une succession de tirages à *pile* ou *face* indépendants. Notamment, la moyenne

$$\mathrm{M}_n = \frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n}{n}$$

converge (en probabilité et presque sûrement) vers une constante m, qui est ici la probabilité d'obtenir *pile* à chaque tirage. Cette propriété reste vraie sous l'hypothèse plus générale que les X_i sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, admettant une espérance m.

Dans la vie réelle, on ne peut pas réitérer une infinité de fois une expérience, pas plus qu'on ne saurait lancer une infinité de fois la pièce. Une question naturelle est alors : peut-on quantifier la vitesse de cette convergence ? En d'autres termes, quelle est l'importance des fluctuations autour de la valeur limite dans une figure telle que celles de la page 384 ?

La largeur typique de ces fluctuations est donnée simplement par l'écart-type de M_n, s'il est défini ; supposons désormais que les X_i admettent un moment d'ordre 2 et notons $\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{X}_1}$, l'hypothèse d'indépendance des variables $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ permet alors de conclure que leurs variances s'ajoutent (égalité de Bienaymé), et donc

Chapitre 22

Techniques d'approximation

Le chapitre précédent montre la convergence de certaines lois vers une loi normale. Or, il peut être intéressant d'approcher une distribution par une autre — notamment parce qu'une loi normale admet une densité. Nous exposons ici les techniques d'approximations : poissonienne d'une loi binomiale, normale d'une loi binomiale ou d'une loi de Poisson.

22.1 APPROXIMATIONS POISSONIENNES

Convergence vers une loi de Poisson § 322

Rappelons l'énoncé du théorème 6.21, démontré au chapitre 6.

■ **Théorème 22.1 (Limite d'épreuves de Bernoulli)** *Soit* $(p_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite de réels de* $]\,0\,;\,1\,[$ *telle que* $\lim n\,p_n = \lambda$. *Pour chaque entier* n, *on note* X_n *le nombre de succès obtenus dans la succession de* n *épreuves de Bernoulli indépendantes, et de même loi* $\mathscr{B}(p_n)$ *; ainsi,* $\mathrm{X}_n \rightsquigarrow \mathscr{B}\,(n\;;\;p_n)$. *Alors, pour tout entier* k, $\mathbf{P}\,\{\mathrm{X}_n = k\} \to \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$, *c'est-à-dire que la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en loi vers* $\mathscr{P}(\lambda)$.

Cet énoncé peut se généraliser en n'imposant plus aux n épreuves de Bernoulli d'avoir le même paramètre p_n. Pour chaque valeur de n, on considère des variables $\mathrm{X}_{n,1}, \mathrm{X}_{n,2}, \ldots, \mathrm{X}_{n,n}$ indépendantes et on forme leur somme S_n. Les variables $\mathrm{X}_{n,k}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p_{n,k}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \text{somme} \\
p_{1,1} & & & & & & q_1 \\
p_{2,1} & p_{2,2} & & & & & q_2 \\
p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & & & & q_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots \\
p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} & \cdots & p_{n,n} & & q_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

Ce théorème, comme celui qui suit, illustre le fait qu'une distribution de Poisson peut être obtenue en collationnant un grand nombre d'événements rares (et indépendants).

Chapitre 23

Espérance conditionnelle

Ce qui est simple est faux, ce qui est compliqué est inutilisable.

Paul Valéry

L'espérance d'une variable aléatoire peut être vue comme sa meilleure approximation sous forme d'un scalaire et, plus précisément, comme sa meilleure approximation quadratique, puisque $\mathbf{E}\,|\mathrm{Y}-m|^2$ *est minimale lorsque* $m=\mathbf{E}(\mathrm{Y})$[1]. *Lorsque l'on connaît un renseignement numérique limitant le domaine de* Ω *dans lequel se trouve* ω *(c'est-à-dire un renseignement de la forme «* $\omega \in \mathrm{A}$ *»), on peut calculer,* via *la probabilité* $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}$ *conditionnée par ce renseignement, l'« espérance conditionnée »* $\mathbf{E}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y})$ *de* Y. *Si ce renseignement est le résultat d'une seconde variable aléatoire* X, *l'espérance conditionnelle de* Y *est donc une quantité dépendant de* ω *au travers de la valeur de* X *; c'est donc une variable aléatoire mesurable par rapport à* $\sigma(\mathrm{X})$.

Ce chapitre expose tout d'abord la théorie de l'espérance conditionnelle lorsque X *est une variable aléatoire discrète — et que tout va bien. Dans un second temps, les résultats sont généralisés au cas d'une variable quelconque — et les difficultés jaillissent, qui sont résolues de deux manières différentes : par un théorème issu de la théorie de la mesure (Radon-Nikodým), ou par une interprétation géométrique de meilleure approximation quadratique dans le cas de variables de* L^2.

23.1 LE CAS FINI OU DÉNOMBRABLE

Dans toute cette section, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ et discrètes, ce qui permettra de définir de manière élémentaire la notion d'espérance conditionnelle puis de démontrer par simple calcul quelques propriétés essentielles ; on vérifiera que celles-ci sont encore vraies pour des variables quelconques, bien que les démonstrations fassent alors appel à des outils plus sophistiqués.

⟨1⟩. Théorème 14.37 page 325. On en rappelle l'interprétation géométrique : l'espérance de X est égale à sa projection orthogonale sur la droite des variables aléatoires déterministes (= constantes) $\mathrm{D} = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$.

Chapitre 24

Quelques résultats élégamment établis par la théorie des probabilités

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats d'analyse démontrés avec des méthodes, des théorèmes ou des idées provenant du monde probabiliste.

- *La formule de Bernstein est une formule découlant rapidement du théorème limite central, mais plus difficile à démontrer avec des outils élémentaires d'analyse.*
- *Le même théorème limite central permet une démonstration relativement élémentaire de la formule de Stirling.*
- *Deux théorèmes (§ 360 et § 361) sont représentatifs de la* méthode probabiliste, *historiquement introduite par Erdős. Il s'agit de prouver l'existence (certaine !) d'un objet possédant telle propriété, en montrant par exemple que la mesure de l'ensemble des objets possédant cette propriété est strictement positive. Le langage même de l'aléatoire pourrait d'ailleurs être totalement gommé au profit de celui de* mesure *— mais l'intuition initiale étant probabiliste, ne boudons pas notre plaisir.*
- *Le théorème de Weierstrass sur la densité de l'espace des fonctions polynomiales a reçu, au début du siècle, une démonstration particulièrement simple et élégante par Bernstein ; c'est l'occasion de voir l'apparition très naturelle des polynômes du même nom.*

La formule de Bernstein § 359

Un exemple des plus célèbres d'application « non probabiliste » des probabilités est la **formule de Bernstein** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Ce n'est pas à vrai dire une application tellement impressionnante des probabilités : peu de mathématiciens se réveillent le matin en se disant « Tiens, j'aimerais bien démontrer cette formule » et finissent pas se dire que les probabilités peuvent les

Chapitre 25

Simuler informatiquement une loi de probabilité

GUILDENSTERN *Syllogism the second: One, probability is a factor which operates within natural forces. Two, probability is not operating as a factor. Three, we are now within un-, sub- or supernatural forces. Discuss.* (Rosencrantz is suitably startled. Acidly.) *Not too heatedly.*⟨1⟩

Tom STOPPARD, *Rosencrantz & Guildenstern are dead.*

Toutes les méthodes de simulation de lois probabilistes se basent sur l'existence d'une source aléatoire de loi uniforme. Le lecteur ne cherchant qu'à simuler une loi de Poisson, une loi normale, etc., peut admettre l'existence d'un programme informatique, que nous appellerons « `rand` *», dont les sorties successives, lorsqu'il est appelé de manière répétée, forment une suite numérique* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *correspondant à une suite de variables aléatoires* indépendantes *et de loi uniforme sur* $[\,0\,;\,1\,]$. *Une très courte discussion sur les algorithmes permettant de simuler une loi uniforme est proposée en fin de chapitre.*

25.1 SIMULER UNE LOI DISCRÈTE

Dans toute la suite du chapitre, on supposera donnée une fonction `rand` qui retourne un réel de l'intervalle $[\,0\,;\,1\,[$, avec une probabilité uniforme, et telle que des appels successifs à cette fonction donnent des résultats indépendants.

Remarque 25.1 Remarquons d'ores et déjà que l'on aura parfois à considérer que `rand` retourne un réel de $]\,0\,;\,1\,[$, ou de $[\,0\,;\,1\,]$; comme dans tous les cas, la probabilité d'obtenir exactement 0 ou 1 est nulle, il n'y a pas de véritable contradiction.

⟨1⟩. GUILDENSTERN Syllogisme II : primo, la probabilité est un facteur agissant au sein de forces naturelles. Deuxio, la probabilité n'agit pas en tant que facteur. Tertio, nous sommes les jouets de forces anti-, sous- ou surnaturelles. Discutez. *(Rosencrantz est proprement ébahi. D'un ton aigre :)* Ne nous emportons pas.

Chapitre 26

Méthodes de Monte-Carlo

L'analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer & fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paroissoit peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnoître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie, est tout-à-fait accidentel, & que le hasard, selon qu'il est modifié & conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi-bien que de celui de l'analyse.

Comte de BUFFON, Essai d'Arithmétique morale*, chap.* XXIII

La méthode de Monte-Carlo a été développée à Los Alamos par John von Neumann, Stanisław Ulam, Enrico Fermi et Nicholas Metropolis (qui en invente le nom) pour effectuer des calculs numériques que les algorithmes déterministes rendaient rédhibitoirement longs [74].

Elle a connu une fortune prodigieuse et ses avatars permettent de résoudre de manière très précise de nombreux problèmes : calcul d'intégrales, résolution d'équations différentielles, recherche de minimas, recherche d'algorithmes optimaux. Le domaine d'application est en réalité si vaste que l'on ne peut qu'à peine en effleurer la surface dans les quelques pages qui suivent.

Des méthodes basées sur des tests aléatoires permettent également de dire, très rapidement et avec un risque très faible d'erreur, si un entier est premier ou non⟨1⟩ (§ 385). Des études statistiques permettent également de deviner si une liste de données a été falsifiée ou non (§ 388).

⟨1⟩. La commande `isprime` du logiciel Maple, par exemple, effectue un test probabiliste de primalité, et non une étude déterministe, qui serait astronomiquement trop coûteuse en temps pour des grands entiers.

Chapitre 27

Arithmétique et probabilités : une randonnée

Par Emmanuel Kowalski

La théorie des probabilités est basée sur un certain nombre d'idées et de concepts abstraits qui ont été modélisés par Kolmogorov en particulier. Depuis lors, il est naturel de s'intéresser à ces idées indépendamment de toute réalisation concrète, en s'appuyant sur des résultats généraux qui établissent, a priori, *que les hypothèses que l'on peut faire (comme l'existence de suites* (X_n) *de variables aléatoires indépendantes dont les lois sont données à priori) ne sont pas contradictoires.*

Dans ce chapitre, le point de vue est un peu différent : nous allons considérer des objets parfaitement concrets et, apparemment, « déterministes », et nous allons pourtant expliquer qu'ils peuvent incarner la plupart des constructions probabilistes importantes. Ces objets seront, tout simplement, les entiers naturels strictement positifs, qui sont l'objet de la théorie des nombres.

On peut aussi voir cette approche comme parallèle à celle des simulations à la Monte-Carlo : ici, on va faire apparaître des lois de probabilités usuelles (comme la loi normale, ou les lois de Poisson, et l'on pourrait donner beaucoup d'autres exemples) ou inhabituelles (la mesure qui contrôle l'écart entre valeurs propres entre matrices unitaires de grande taille) non pas à l'aide de processus physiques que l'on peut aisément (!) créer dans le monde réel, mais à l'aide de la suite des entiers naturels.

Du point de vue des mathématiques pures, ce chapitre est aussi une illustration de l'intérêt des idées et des raisonnements probabilistes, et surtout de la convergence en loi, qui — cachée souvent sous le nom « équirépartition » — est l'une des idées les plus utiles qui soit...

Chapitre 28

Bosons, fermions et boltzmannions

Dans ce court chapitre, nous montrons deux applications simples du dénombrement à la mécanique statistique. La première consiste à montrer que, dans un système isolé constitué d'un grand nombre de particules, la probabilité de trouver l'une d'elles dans un état individuel d'énergie ε est proportionnel à $\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}$, où β est une constante que l'on peut identifier à $1/k_{\mathrm{B}}\mathrm{T}$, où T est la température du système et k_{B} la constante de Boltzmann. Dans la seconde, nous montrons comment l'hypothèse d'indiscernabilité des particules — bosons ou fermions — affecte leur répartition et, notamment, le nombre moyen d'états occupés.

28.1 LE FACTEUR DE BOLTZMANN

Théorie cinétique des gaz et statistiques non quantiques § 389

Dans une série de travaux qui ont profondément bouleversé la physique moderne, le physicien allemand Ludwig Boltzmann (1844–1906) a posé les principes probabilistes de la thermodynamique statistique. Il s'agissait de construire, de façon mathématique, un modèle de gaz dont les particules, régies par les lois usuelles de la mécanique, sont en nombre si grand que la description individuelle doit être remplacée par une description statistique⟨1⟩. À l'époque de la fondation de la mécanique statistique, il s'agissait d'ailleurs surtout de décrire des systèmes à l'équilibre⟨2⟩.

Le principe de base de la mécanique statistique est de considérer que les positions et les vitesses des molécules d'un gaz peuvent être considérées comme des

⟨1⟩. Rappelons qu'un litre de gaz à pression et température ambiante contient environ $3 \cdot 10^{22}$ molécules ; la description mécanique du système est donc la donnée d'autant d'équations différentielles d'ordre 2 pour chaque dimension d'espace.

⟨2⟩. Les mouvements des particules étant rapides, une transformation « lente » à l'échelle humaine peut être décrite comme une succession de positions d'équilibre ; les transformations violentes (comme le cas d'un gaz emprisonné dans une bouteille de verre, elle-même contenue dans une enceinte hermétique, au moment où la bouteille se brise) ne sont pas concernées par la mécanique statistique à l'équilibre : tout au plus peut-on décrire l'état initial et l'état final après relaxation du système.

Chapitre 29

Processus de Poisson

(brève introduction)

Dans ce court chapitre, nous présentons un premier exemple simple de processus stochastique (un second exemple plus compliqué, le mouvement brownien, fait l'objet du chapitre suivant). Un processus de Poisson est un cas particulier de processus de comptage : c'est une famille $\{\mathrm{N}(t)\ ;\ t \geqslant 0\}$ *de variables aléatoires à valeurs entières, qui « compte » le nombre d'occurrences d'un certain type d'événement avant l'instant* t*. Le lien, déjà aperçu plusieurs fois, entre variables exponentielles et variables de Poisson, trouve ici son expression la plus achevée. La théorie montre de plus que, sous des hypothèses générales, un processus de Poisson est une modélisation convenable de situations naturelles, ce qui explique la grande faveur dans laquelle est tenue ce type de processus.*

En guise d'introduction : comment placer des points uniformément sur $\mathbb{R}^+$? § 396
Comment distribuer aléatoirement, et indépendamment les uns des autres, des points sur la demi-droite réelle $\mathbb{R}^+$, de telle sorte que leur densité soit (en moyenne) constante sur chaque intervalle ? Par indépendant, on entend ceci : que le nombre de points dans un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ soit indépendant du nombre de points dans un intervalle $[\,c\,;\,d\,]$ disjoint du premier.

La méthode naïve (placer les points les uns après les autres) échoue avant même de débuter : comment diable pourrait-on placer un point uniformément sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$?

Une autre approche possible est la suivante. Notons λ la densité désirée. Il est bien entendu que, par densité, on entend : le nombre de points sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ est une variable aléatoire, d'espérance $(b-a)\lambda$. Si $n \geqslant 1$ est un entier, plaçons, uniformément et indépendamment, n points sur l'intervalle $[\,0\,;\,n/\lambda\,]$. À la limite $n \to \infty$, on devrait obtenir la modélisation désirée.

Le problème de cette deuxième méthode est qu'elle ne converge qu'en loi : chaque fois que l'on change n, il faut recalculer tous les points. Et, à n fixé, aucune condition n'est vraiment respectée : la densité n'est bien sûre égale à λ que sur $[\,0\,;\,n/\lambda\,]$, mais de plus la répartition des points ne satisfait pas à la condition d'indépendance. Par construction, le nombre total de points sur l'intervalle

Chapitre 30

Mouvements browniens

La théorie du mouvement brownien s'est, depuis un peu plus d'un siècle, développée de façon spectaculaire. De manière tout à fait remarquable, elle est au cœur de l'intérêt de nombreux mathématiciens et de physiciens ; si elle a fourni une modélisation satisfaisante du mouvement observé de fines particules et permis une détermination expérimentale du nombre d'Avogadro, son intérêt n'a cessé de croître quand d'éminents physiciens ont proposé une formulation entièrement nouvelle de la théorie quantique des champs par des intégrales dont les variables étaient des chemins browniens ; ces connexions très profondes entre mouvement brownien et théorie quantique des champs ont été étendues à la mécanique statistique, la gravitation quantique, la théorie de la percolation, etc. Le champ de recherche du mouvement brownien est gigantesque et en perpétuelle expansion, diverses disciplines (probabilités, analyse harmonique, physique théorique, mathématiques financières) s'y rencontrant et s'enrichissant mutuellement.

À cause de la très grande technicité des outils mis en jeu, toutefois, nous devrons nous contenter de proposer une simple introduction à ce vaste domaine, le but (avoué) étant d'abord de donner envie au lecteur de s'y plonger entièrement ; et puisque l'eau est fraîche, on commence par une partie heuristique simple.

30.1 UNE APPROCHE HEURISTIQUE

L'observation de Robert Brown §406

Le botaniste anglais Robert Brown fit paraître, en 1828, un opuscule intitulé : *A brief account of microscopical observations [...] on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules.* Cherchant à élucider, durant l'été 1827, le problème du transport de particules jusqu'à l'ovule d'une plante, il observa au microscope, de très fines particules oblongues contenues *dans* les grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une petite fleur rose découverte durant la fameuse expédition de Lewis & Clark, choisie parce que ces particules étaient de tailles inhabituellement grosses, et donc plus faciles à observer), et les trouva animées de mouvements désordonnés, indépendants les uns des autres et, surtout, perpétuels ; l'origine de ces mouvements lui était inconnue. Étaient-ils liés à la nature *vivante* d'une plante ? Il effectua des observations similaires sur d'autres espèces de plantes, puis chercha à savoir si cette propriété perdurait après la mort. Il constata successivement que :

Chapitre 31

Estimation bayésienne

Lors de la modélisation probabiliste d'une situation, il arrive qu'une probabilité p, constitutive du modèle, soit inconnue, par manque d'observations, par impossibilité de répéter l'expérience ne serait-ce qu'une seconde fois, ou toute autre raison.

L'approche bayésienne consiste alors à construire une méta-modélisation, en considérant tous les modèles possibles fondés sur le nombre p, et à postuler une loi de distribution a priori*, pour la valeur de p — en général une densité $f(p)$ — qui modélise, plus ou moins précisément, les informations d'ordre psychologique que nous pensons détenir sur p (est-il proche de 0, de 1, a-t-on une bonne confiance en sa valeur ou l'imagine-t-on au contraire bien étalé dans $[\,0\,;\,1\,]$?). Les observations effectuées permettent ensuite de modifier cette distribution, et fournissent une nouvelle évaluation de p.*

Cette approche est assez fréquente mais, malgré des succès certains, parfois critiquée, notamment par les tenants d'une interprétation statistique des probabilités.

Remarque 31.1 Il convient de ne pas mélanger le *théorème de Bayes* (§ 61, page 104), qui est un théorème tout ce qu'il y a de plus solide, et nulle part contesté, et l'*approche bayésienne* des probabilités, qui consiste à utiliser des distributions *a priori* de p.

Distribution *a priori* uniforme, et distribution *a posteriori* § 433

Considérons une situation simple : un mathématicien décide d'aller visiter l'Écosse ; il a entendu dire que les moutons, noirs ou blancs, y sont nombreux et, durant son premier trajet en train dans la campagne, il scrute le paysage par la fenêtre en guettant les ovins. La proportion p de moutons blancs lui est inconnue. Une attitude possible pour lui est d'attribuer, en son for intérieur, une distribution uniforme à p, c'est-à-dire choisir une densité

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette modélisation, la variable p admet pour valeur moyenne $\hat{p} = \frac{1}{2}$. (Nous ne la notons pas « $\mathbf{E}(p)$ », réservant la notion d'espérance au procédé de calcul effectué dans un univers probabilisé $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P}_p)$, où $\mathbf{P}_p$ est une mesure de probabilité

Chapitre 32

Retour à pile ou face : loi de l'Arc sinus et séries aléatoires

Dans ce court chapitre, nous revenons sur les successions infinies de tirages à pile *ou* face.

- *Dans une première partie, nous montrons que, si l'on est momentanément vainqueur dans une partie endiablée de* pile *ou* face, *alors on a de fortes chances de l'être pour longtemps !*
- *Puis, nous revenons à la nature des séries* $\sum \pm 1/n$ *— séries harmoniques avec une distribution aléatoire de signes, et nous montrons que : si les signes sont répartis équitablement, la série est presque sûrement convergente, mais qu'elle diverge presque sûrement dans le cas contraire.*
- *Enfin, nous montrons que le rayon d'une série entière* $\sum \mathrm{A}_n\, z^n$*, dont les coefficients* A_n *sont aléatoires mais indépendants et identiquement distribués, ne saurait prendre (presque sûrement) que trois valeurs :* 0, 1 *et* $+\infty$.

32.1 L'INIQUITÉ FLAGRANTE D'UN JEU ÉQUITABLE

La loi de l'Arc sinus §435

Considérons une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$, et notons $\mathrm{Y}_n = 2\mathrm{X}_n - 1$, de telle sorte que les Y_n sont des variables de Rademacher indépendantes

$$\mathbf{P}\{\mathrm{Y}_n = +1\} = \mathbf{P}\{\mathrm{Y}_n = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Les variables Y_n modélisent le gain de l'un des joueurs (Rosencrantz) lors d'une partie de *pile* ou *face* : gain de 1 € si la pièce tombe sur *pile*, gain de -1 € si elle tombe sur *face*. On note $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \cdots + \mathrm{Y}_n$ le gain total à l'issue de n parties. Enfin, on note K_n le nombre de sommes $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_n$ positives ou nulles : K_n est donc la durée, dans l'intervalle $[\![1\,;\,n]\!]$, durant laquelle Rosencrantz est satisfait d'être globalement gagnant.

Chapitre 33

En guise de conclusion : à propos de quelques paradoxes

Crois-moi : il y a peu de raisons plus valables de faire des cauchemars que de découvrir, caché au cœur des mathématiques, le germe de la folie.

Daniel KEHLMANN, La Nuit de l'Illusionniste *[57].*

La plupart des paradoxes ont pour cause l'ambiguïté inhérente à toutes les langues ; le passage difficile d'un énoncé en français à un énoncé mathématique censément équivalent engendre aussi bien des résultats amusants que d'épineux problèmes. D'autres paradoxes proviennent d'un résultat rigoureusement démontré, mais non conforme à l'intuition, parfois trompeuse, comme le paradoxe des anniversaires[1]*; un des cas les plus classiques résulte de la confusion entre* ignorance *de la réalisation ou non d'un événement, et* croyance *en l'équiprobabilité des éventualités.*

Enfin, le fameux paradoxe de Saint-Pétersbourg est typique de ce qui arrive lorsque l'on manipule des quantités infinies pour modéliser une situation qui, par nature, ne connaît que des quantités finies.

33.1 BIAIS D'ÉQUIPROBABILITÉ

Biais d'équiprobabilité : le paradoxe des deux cassettes § 440

On appelle *biais d'équiprobabilité* la tendance (fautive) à traduire l'absence de connaissance sur la probabilité de chacune des issues possibles d'une expérience par l'équiprobabilité entre ces issues.

⟨1⟩. Présenté dans l'exercice 1.1 page 50.

Annexe A

Éléments d'analyse et d'algèbre

On résume ici quelques points d'analyse et d'algèbre utilisés dans l'ouvrage : suites, séries, familles sommables, suites de fonctions, séries entières, fonctions dérivables, convexité, pseudo-inverse, calcul intégral, calcul dans les espaces de Hilbert, transformation de Fourier, théorème spectral notamment.

A.1 SUITES

Fini, dénombrable, indénombrable A1

Un ensemble A est dit **(strictement) dénombrable** s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{A}$ (que l'on appelle un **dénombrement**). En d'autres termes, on a pu *numéroter* tous les éléments de A par des entiers, c'est-à-dire écrire $\mathrm{A} = \{a_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$, en notant plus commodément $a_n := \varphi(n)$. ✥ On dit souvent d'un ensemble qu'il est **dénombrable** pour indiquer qu'il est *fini* ou *strictement dénombrable.* ✥ Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. ✥ Si A est un ensemble et D un ensemble dénombrable, et s'il existe une injection $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$, alors A est dénombrable. ✥ De même, s'il existe une surjection $\psi : \mathrm{D} \to \mathrm{A}$ et si D est dénombrable, alors A est dénombrable. ✥ Si A et B sont dénombrables, alors $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ l'est également. ✥ Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont évidemment dénombrables. En revanche, $[\,0\,;\,1\,]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$,... ne le sont pas. Deux cas particuliers interviennent fréquemment :

■ **Proposition A.1** $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

DÉMONSTRATION : À tout rationnel r, on peut associer de manière unique une écriture $r = p/q$, où q est un entier naturel non nul, et p un entier relatif. L'application $r \mapsto (p, q)$ établit une *injection* de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, qui est dénombrable. ▮

■ **Proposition A.2** *L'ensemble* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *n'est pas dénombrable.*

DÉMONSTRATION : Suivons l'argument classique de la *diagonale de Cantor* et supposons qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pour chaque entier n, notons

$$\varphi(n) =: (\varepsilon_0(n), \varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_k(n), \dots).$$

Annexe B

Davantage sur la mesure

Donnons ici quelques compléments sur les tribus et les fonctions mesurables.

- *Nous commençons par passer en revue les divers boréliens utiles en théorie des probabilités : boréliens de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$, puis boréliens de $\mathbb{R}^{\mathrm{T}}$ où T est un ensemble dénombrable (* A*62, utile pour le jeu de* pile *ou* face *par exemple) ou non dénombrable (* A*63, utile pour les processus à temps continus comme le mouvement brownien).*
- *Après quelques définitions générales sur les fonctions mesurables, nous démontrerons le théorème de factorisation des fonctions mesurables par rapport à la tribu* $\sigma(\mathrm{X})$.
- *Nous terminons le chapitre par un rapide tour d'horizon des techniques liées au lemme de classe monotone, et qui sont d'une très grande puissance. Une description complète de la mesure* **P** *sur chacun des éléments de* $\mathfrak{T}$ *étant, en pratique, impossible, on montre qu'il suffit de la définir sur un ensemble* $\mathfrak{A}$ *plus réduit — le but étant évidemment de chercher l'ensemble* $\mathfrak{A}$ *le plus petit possible :*
  - *pour définir* **P** ex nihilo*, on la définit d'abord sur une algèbre* $\mathfrak{A}$ *engendrant* $\mathfrak{T}$ *;*
  - *si au contraire on suppose que* **P** *existe, alors elle est caractérisée par ses valeurs prises sur une structure encore plus simple (un* π*-système).*

B.1 BORÉLIENS

Boréliens de $\mathbb{R}$ A60

Tout d'abord, une petite remarque d'ordre topologique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation d'équivalence « $\sim$ » par : $x \sim y$ si et seulement si le segment $[\,x\,;\,y\,]$ est inclus dans U. La classe d'équivalence d'un élément x de U est donc intervalle ouvert. L'ensemble U est la réunion disjointe de ses classes d'équivalence modulo $\sim$; si l'on choisit, dans chaque classe d'équivalence, un représentant *rationnel*, on a donc montré que :

■ **Lemme B.1** *Tout ouvert* U *de* $\mathbb{R}$ *est union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.*

Annexe C

Théorèmes d'existence

En d'innombrables occasions, nous avons formulé des hypothèses du genre : « soit X *une variable aléatoire suivant telle loi », ou encore « soit* $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ». Diantre ! A-t-on effectivement le droit de le faire ? Après avoir donné des exemples élémentaires de théorèmes d'existence, nous présentons le théorème de Kolmogorov qui les généralise et qui permet, notamment, de fabriquer des suites de variables aléatoires de lois conjointes imposées, ou bien de suites de variables aléatoires indépendantes de lois marginales imposées.*

C.1 DEUX EXEMPLES SIMPLES DE THÉORÈMES D'EXISTENCE

Existence d'une variable aléatoire de loi donnée A73

Le problème le plus simple que l'on se pose est : si l'on se donne une fonction $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to [\,0\,;\,1\,]$ convenable, existe-t-il *effectivement* une variable aléatoire qui admette F comme fonction de répartition ?

■ **Théorème C.1 (Théorème de réalisation)** *Soit* F *une fonction croissante, continue à droite et admettant les limites* 0 *et* 1 *en* $-\infty$ *et* $+\infty$ *respectivement. Alors il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbf{P})$ *et une variable aléatoire* $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ *tels que* F *soit la fonction de répartition de* X.

En d'autres termes, si l'on se donne une « loi de variable aléatoire », alors on peut réaliser cette loi au moyen d'une variable aléatoire.

Le démonstration est aisée dans son principe : on choisit pour espace $\Omega := \mathbb{R}$, et on définit la probabilité **P** par sa valeur sur les intervalles $]\,-\infty\,;\,x\,]$ par $\mathbf{P}\big(\,]\,-\infty\,;\,x\,]\,\big) := \mathrm{F}(x)$. On choisit enfin comme tribu la tribu $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ des boréliens. Le fait d'avoir défini **P** sur les intervalles $]\,-\infty\,;\,x\,]$ permet d'étendre, de manière unique, **P** à toute la tribu engendrée par ces intervalles, à savoir justement la tribu $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ des boréliens[1]. Il ne reste plus qu'à définir la variable X comme l'identité :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{X}(\omega) = \omega.$$

⟨1⟩. Rappelons qu'il s'agit essentiellement d'utiliser le théorème de Carathéodory, après avoir défini **P** sur l'algèbre $\mathfrak{A}$ des unions finies disjointes d'intervalles $]\,a\,;\,b\,]$, et après avoir prouvé que **P** ainsi étendue est σ-additive sur $\mathfrak{A}$.

Annexe D

Tables

D.1 LANGAGE ENSEMBLISTE ET LANGAGE PROBABILISTE

Notation	Langage ensembliste	Langage probabiliste
ω ($\omega \in \Omega$)	élément	événement atomique
A ($A \subset \Omega$)	partie de Ω	événement
$\omega \in A$	ω est élément de A	A est réalisé
$A \subset B$	A inclus dans B	l'événement A implique l'événement B
$A \cup B$	réunion	réalisation de A *ou* de B
$A \cap B$	intersection	réalisation simultanée de A *et* de B
A^c ou $\Omega \setminus A$	complémentaire	non-A (événement contraire)
$A \setminus B$	A privé de B	réalisation de A mais pas de B
$\varnothing$	partie vide	événement impossible
Ω		événement certain
$A \cap B = \varnothing$	parties disjointes	A et B sont des événements incompatibles
$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$	union de $(A_n)_{n\geqslant 0}$	réalisation d'au moins un des événements A_n
$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$	intersection de $(A_n)_{n\geqslant 0}$	réalisation de tous les événements A_n
$A_n \uparrow A$	la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \lim_n \uparrow A_n$	
$A_n \downarrow A$	la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \lim_n \downarrow A_n$	
$\limsup A_n$	$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n \text{ ; i.s.}\}$	réalisation d'une infinité d'événements parmi $A_0, A_1, \dots$
$\liminf A_n$	$\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$	réalisation de tous les événements $A_0, A_1, \dots,$ sauf peut-être un nombre fini d'entre eux (= réalisation de tous les événements à partir d'un certain rang)

TABLE D.1 — *Langage des probabilités et langage ensembliste correspondant.*

Annexe E

Lexique français-anglais

français	*anglais*
absolument continue	*absolutely continuous*
aléatoire	*random*
algèbre	*algebra, field*
atome	*atom*
biais	*bias*
borélien	*Borel set*
branchement (processus de)	*branching process*
classe monotone	*monotone class, d-system,* *λ-system, Dynkin system*
coefficient d'aplatissement	*kurtosis*
coefficient de corrélation	*(linear) correlation coefficient*
convergence en loi / étroite	*convergence in law/distribution*
convergence étroite	*weak convergence*
convergence en probabilité	*convergence in probability*
convergence presque sûre	*almost sure convergence*
covariance	*covariance*
dé équilibré	*fair dice*
degré de liberté (d.d.l.)	*degree of freedom (d.o.f.)*
dénombrable	*countable, enumerable*
densité de probabilité	*density function*
— conjointe, marginale	*joint, marginal —*
écart type	*standard deviation*
échantillon	*sample*
épreuve ω	*sample point*
équiprobables	*equally likely*
espace des épreuves	*sample space*
espérance	*expectation, expected value, mean value*
estimateur sans biais	*unbiased estimateur*
estimateur convergent	*consistent estimator*
événement	*event*
fonction de répartition	*(cumulative) distribution function c.d.f.*
— conjointe, marginale	*joint, marginal —*
hypothèse nulle	*null hypothesis*
incompatibles	*mutually exclusive*

Index

Les numéros de page en **gras** renvoient aux définitions principales, ceux en *italique* à des exercices. Les noms en PETITES CAPITALES renvoient aux indications biographiques. Les numéros de page précédés par la lettre « H » renvoient à des définitions données dans la partie « Heuristique », qui peuvent être plus informelles que les autres.

Symboles

0–1 (loi du — de Kolmogorov) 419
$\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ 133
$\mathfrak{B}(\mathbb{C})$ 357
$\mathfrak{B}^{\infty}$ 667
$\mathfrak{B}^{n}$ 667
Γ (loi —) 235, *279*
Ω . . . . [H34]
χ^2 (loi du —) 235
δ_a (mesure de Dirac) 84, **93**
γ (loi —) 235
  simulation *528*
ω . . . . [H34]
π–λ (théorème —) 672
π-système 671
  — et indépendance 673
$\preccurlyeq$ 669
$\sigma(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ 418
$\sigma(\mathrm{X})$ 341
$\sigma(\mathfrak{F})$ 81
σ-additivité . . . . [H44], **84**
σ-algèbre **79**
σ-finie (mesure —) 675
σ-sous-additivité 87, *97*
$\sim$ $(u_n \sim v_n)$ 639
$\otimes$ (produit direct/tensoriel) 263
$\otimes$ (tribu produit)
  $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{G}$ 667
  $\bigotimes \mathfrak{F}_i$ 667
ζ (fonction — de Riemann) 556

A

Absolument continue
  densité — 93
  fonction — 645
  mesure — 675
  variable aléatoire — 224
Accroissements
  indépendants 575
  stationnaires 575
Adaptée (suite — à une filtration) 483
Additive 85
  σ-additive . . . . [H44], **84**
  sous-additive 85
Adjoint d'un endomorphisme 663
Aiguille de Buffon 532
Aléa . . . . [H34]
Aléatoire
  matrice — *339*, 555
  variable — . . . . voir Variable aléatoire
Alembert (erreur de d'—) 39
Algèbre **78**
  engendrée 79
  sans atomes *96*
Anniversaires (paradoxe des —) *50*
Aplatissement 252
Application mesurable . . . . [H58], 291, 668
Approximation
  binomiale par normale 449
  binomiale par Poisson 448
  Poisson par normale 451
Arc sinus (loi de l'—) *241*, 617
Arrêt (temps d'—) 350
Asymétrie (coefficient d'—) 252
Asymptotique (tribu —) 417
Atome 79
  algèbre sans —s *96*
  d'une partition 470
  tribu sans —s *96*
Atomique (événement) . . . . [H34]
Autoadjoint (endomorphisme —) 664
Avogadro (nombre d'—) 600
Axiomes
  1 à 3 84
  $3'$, $3''$ et $3'''$ 86

B

$\mathrm{B}(a, b)$ (loi bêta) 235
$\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ . . . . voir Binomiale (loi)
$\mathscr{B}(p)$ 133
Bêta (loi —) 235
Baguette brisée *278*
Banach (espace de —) 663
Base hilbertienne 658
Bayes (formule de —) 104, 105
  version continue 273
Benford (loi de —) 544
Bernoulli
  épreuve de — 133
  loi de — 133
Bernstein
  formule de — 495
  inégalité de — 328
  théorème de — 502
Bertrand (série de —) 639
Biais d'un estimateur 462
Bienaymé (égalité de —) 186, 270, 350
Bienaymé-Tchebychev (inég. de —) . 157, 253, **327**
  d'ordre k 327
Bilatérale (loi exponentielle —) *280*
Binomial (coefficient —) 660
Binomiale (loi —) **134**
  approximation par Poisson 448
  approximation par une loi normale . 449
  calcul de l'espérance 149
Boltzmann
  facteur de — 64, **563**
  formule de — 566
Boole
  algèbre de — 78
  inégalité de — 87, *97*
Borel
  lemme de Borel-Cantelli 117
  théorème des nombres normaux de —218
Borélienne (fonction —) 668
Boréliens
  de $\mathbb{C}$ 357
  de $\mathbb{R}$ 81, **665**
  de $\mathbb{R}^n$ 332, **667**
Borne inférieure/supérieure 79

Bortkiewicz Władisław . . . 137
Boson . . . [H41], 568
Boule ouverte . . . 663
Box-Muller (méthode de —) . . . 519
Branchement (processus de —) . . . 195
Brownien . . . voir Mouvement
Bruit de grenaille . . . 577
Buffon, comte de . . . 532
Buffon (aiguille de —) . . . 532
Bywater John . . . 582

C

Cantelli
 lemme de Borel- — . . . 117
 loi forte . . . 432, *434*
 théorème de Glivenko- — . . . 429
Cantor
 diagonale de — . . . 637
 fonction de — . . . 648
Carathéodory (théorème de —) . . . 94, **675**
Cauchy
 loi de — . . . 234
  somme de variables de — . . . *363*
 produit de — . . . 654
 suite de — . . . 638
Cauchy-Schwarz (inég.) . . . 156, 249, **321**, 334
 dans un espace préhilbertien . . . 657
Causalité . . . 459
Cavalerie Légère . . . 317
Central (théorème-limite —) . . . **438**, 443
Centré
 moment —
  d'une variable à densité . . . 247
  d'une variable discrète . . . 152
 variable —e . . . 155, 252
Chaîne de Markov . . . *199*
Chaleur (équation de la —) . . . 586
Champernowne (nombre de —) . . . 219
Changement de variable . . . 656
 aléatoire . . . 237
Chapeaux (problème des —) . . . 149
Chapman-Kolmogorov (équation de —) . . 586
Chenille . . . *50*
Classe monotone . . . 671
 engendrée . . . 672
 lemme de — . . . 672
Coalitions (lemme des —)
 cas à densité . . . 265
 cas discret . . . 179
 (démonstration) . . . 674
 pour des tribus . . . 343, **673**
 pour des variables aléatoires . . **344**, **673**
Coefficient
 d'asymétrie . . . 252
 binomial . . . 660
 de corrélation . . . 187, 270, 333
Collectionneur (problème du —) . . . 150, **162**
Commutativement convergente (série —) . 641
Complet
 espace probabilisé — . . . 87
 espace vectoriel normé — . . . 663
 système — . . . 88
 système — induit par X . . . 128
 système quasi- — . . . 88
 tribu complète . . . 87
Complexion . . . 561
Composées (th. des probabilités —) [H48], 103
Conditionnelle
 densité — . . . 272
 espérance . . . voir Espérance
 probabilité
  sachant une partition dénombrable 487
  sachant une tribu . . . 488
  sachant une v.a. . . . 488
 probabilité — . . . [H47], 102
Confiance (intervalle de —) . . . 463
Conjointe
 densité — . . . 258
 fonction de répartition — . . . 257
 loi —
  cas à densité . . . 257
  cas discret . . . 174
Continue
 fonction — à droite . . . 644
 variable aléatoire — . . . 224
Continuité
 absolue — . . . 645
 correction de — . . . 449
 monotone . . . 86
 radiale (lemme d'Abel) . . . 654
 théorème de — . . . 362, 398, **401**
 uniforme . . . 644
Convergence
 commutative . . . 641
 dominée (th. de — discret) . . . 165, 644
 dominée (th. de —) . . . 316, *412*
 étroite . . . 393, **395**
 dans L^p . . . 392
 en loi . . . **393**, 395
 monotone . . . 315
  (démonstration) . . . 329
 en moyenne . . . 392
 presque sûre . . . 385
 en probabilité . . . **388**
 simple . . . 652
 d'une suite de parties . . . 116
 uniforme . . . 652
Convergent (estimateur —) . . . 462
Convolution
 des densités . . . 349
 de distributions de Dirac . . . 349
 des fonctions de répartition . . . 348
 formule de — . . . 348
 formule de — discrète . . . 182
 des mesures de probabilité . . . 348
Correction de continuité . . . 449
Corrélation
 et causalité . . . 459
 coefficient de — . . . 187, 270, 333
Coupon collector's problem . . . 150, **162**
Covariance . . . **322**
 d'un couple à densité . . . 269
 d'un couple discret . . . 183
 matrice de — . . . 333
  changement de base . . . 334
Cramér (modèle de —) . . . 542
Crible (formule du —) . . . 89
Critère de Weyl . . . 405
Croissance (propriété de —)
 pour les probabilités . . . 85
 pour les tribus . . . 82
Cylindre . . . 204, 594, **667**, **682**

D

d'Alembert (erreur de —) . . . 39
Dés non transitif . . . *632*
De Moivre (théorème de —-Laplace) . . . 449
de Morgan (règles de —) . . . 38
Décomposition de Lebesgue . . . 298, 648
Décorrélation . . . 325
Décorrélées (variables aléatoires —) . . . 184
Demi-vie . . . 251
Dénombrable . . . 637
Dénombrablement additive . . . [H44]
Dénombrement . . . 637

Densité
au sens des distributions 299
conditionnelle 272
conjointe 258
marginale 261, 335
d'une mesure 675
d'une probabilité 93
sur $\mathbb{R}^n$ 332
d'une variable aléatoire .... [H62], 224
d'un vecteur gaussien 378
Dés non transitifs 632
Destin .... [H34]
Déterministe
système — 33
variable — **33**, 352
Diagonale de Cantor 637
Diffuse (loi —) 224
Dini (théorème de —) 652
Dirac
convolution de distributions de — .. 349
distribution de — 299, **660**
mesure de — 84, **93**
Dirichlet
problème de — 600
théorème de — 641
Discontinuité
de 1^{re}/ de 2^{e} espèce 646
saut de — 647
Discrète
tribu — 79
variable aléatoire — .... [H61], **127**
Distribution 659
de Dirac 299, **660**
convolution 349
de Maxwell-Boltzmann 64, 565
Dominée (th. de convergence —) 316, *412*
cas discret 165, 644
Doob
inégalité des remontées 486
lemme de — -Dynkin 478, 669
Droite de régression 456
Durée de vie 251
Dynkin
lemme de Doob- — 478, 669
théorème de — 672

E

$\mathscr{E}(\alpha)$ 230
Écart-type **314**
d'une variable à densité 248
d'une variable discete 154
Échec 133
Égalité
de Bienaymé 186, 270, 350
de Parseval 658
Einstein Albert 600
Empirique
fonction de répartition — 428
moyenne — 460
Endomorphisme autoadjoint 664
Endomorphisme orthogonal 664
Engendrée
algèbre — 79
classe monotone — 672
tribu — 81, 341, 418
Entropie 566
Épreuves (espace des —) .... [H34], 82
Équation
de la chaleur 586
de Chapman-Kolmogorov 586
Équidistribuée (suite —) 405
Erdős Paul 209
Erdős-Kac (théorème d'—) 551
Erreur
de d'Alembert 39
fonction d'— « erf » 232
Espace
de Banach 663
des épreuves .... [H34], 82
euclidien 663
mesurable **82**
probabilisé **84**
probabilisable **82**
vectoriel normé 663
complet 663
Espérance
calcul pratique 149
conditionnelle
sachant une partition 470
sachant une tribu 477
sachant une v.a. **478**
sachant une v.a. à densité 277
sachant une v.a. discrète 190, 191, **474**
définition alternative 300, 301
définition générale **311**
infinie 309, 311
(cas discret) 147
linéarité 312
cas discret 148
totale (formule de l'—) 190
d'une v.a. complexe 311, **357**
d'une v.a. à densité .... [H72], **245**
d'une v.a. discrète .... [H71], **143**
d'une v.a. simple 308
d'une v.a. positive 309
Estimateur 462
Étagée .... voir Simple
Étroite (convergence —) 393, **395**
Euclidien (espace —) 663
Euler
constante d'—-Mascheroni 639
fonction Γ d'— 645
Événement .... [H35], **82**
atomique .... [H34]
—s incompatibles 82
—s indépendants 112
—s mutuellement indépendants 113
négligeable .... [H38], 87
presque sûr .... [H38], 87
de queue 417
récurrent 208
régénératif 207
symétrique 420
transient 208
Expérience (résultat d'une —) .... [H34]
Exponentielle
bilatérale (loi —) *280*
loi — .... [H62], 230
lien avec la loi de Poisson ... 241, 512
simulation 513
Extension (th. d'— de Kolmogorov) 682

F

Face (trois — d'affilée) *50*
Facteur de Boltzmann 64, **563**
Factoriel (moment —) 166
Factorisation (lemme de —) 478, 669
Faible (loi — des grands nombres) ... 211, **424**
de Khintchine 424
Famille sommable 642
Fatou
inégalités de — 124
lemme de — 315
Feller William 209
Fermé 663

Fermion 568
Feu tricolore (temps d'attente à un —) *296*, *355*
Filtration 483
Fluctuation (intervalle de —) 463
Fonction
  Γ d'Euler 645
  borélienne 668
  de Cantor 648
  d'erreur 232
  génératrice 159
  de Haar 598
  indicatrice d'un événement 133
  mesurable . . . . [H58], 291, 668
  de Rademacher 216
  de répartition . . . . [H58], 130
    conjointe 257
    d'une probabilité sur ℝ 90
    empirique 428
  de Schauder 598, *609*
  singulière 297, 648
  -test 659
  uniformément continue 644
  à variation bornée 644
Formule
  de Bayes 104, 105
    version continue 273
  de Bernstein 495
  de Boltzmann 566
  de convolution 182, 348, **349**
  du crible 89
  de l'espérance totale 190
  de König-Huygens 154, 248, **314**
  de Poincaré 89
  des probabilités composées . . . . [H48], 103
  des probabilités totales . . . . [H47], 103
  de Stirling 639
    preuve probabiliste 497
  de transfert **318**
    pour un couple à densité 263
    pour un couple discret 176
    pour une variable à densité . . 246, 320
    pour une variable discrète 151
  de Vandermonde 140, 661
Forte (loi — des grands nombres) 212, **425**, 426
  (démonstration de Cantelli) 434
  (démonstration de Pratelli) 432
Fortune
  comment gagner des —s 350
  Dame — . . . . [H34]
Fubini (théorème de —)
  cas général 335, 655
  pour les séries doubles 642, 643, *664*

G

$\mathscr{G}(p)$ 134
Galton
  paradoxe de — 632
  processus de — -Watson 195
Gamma
  fonction Γ d'Euler 645
  loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ 235, *279*
gamma
  loi $\gamma(\nu)$ 235
    simulation 517, *528*
Gaussien
  loi —ne . . . . voir Loi normale
  variable —ne 366
  vecteur — 374
Génératrice (fonction —) 159
Géométrique (loi —) 134
  simulation 511
Gibbs Willard 560
Gibbs (paradoxe de —) 566
Glivenko-Cantelli (théorème de —) 429
Gouy Louis Georges 582
Grands nombres
  loi faible des — 211, **424**
    de Khintchine 424
  loi forte des — 212, **425**, 426
    (démonstration de Pratelli) . . 432, 434
Grenaille (bruit de —) 577
Grenouille (paradoxe des —) *279*
Grossière (divergence —) 639
Grossière (tribu —) 79
Guildenstern & Rosencrantz 27
Gumbel (loi de —) 165

H

Haar (fonctions de —) 598
Harmonique
  nombre — 162
  série — 639
Heine (théorème de —) 644
Hewitt-Savage (loi du tout ou rien de —) . 420
Hilbertienne (base —) 658
Hölder (inégalités de —) 166
Huygens (théorème de König- —) . . . 154, 248, **314**
Hypergéométrique (loi —) 139
Hypothèse de Riemann 556

I

Identité de Wald 193, 351
Image
  probabilité — 294
  réciproque d'une partie 58
Indépendance
  accroissements indépendants 575
  de deux événements 112
  mutuelle
    de classes d'événements 343
    d'événements 113
    de tribus 343
    de variables aléatoires **344**
    de variables discrètes 178
    de variables à densité 264
  représentation graphique 342, *354*
  de deux v.a. **341**
    à densité 263
    discrètes 177
  de deux variables aléatoires **342**
Indicatrice (fonction — d'un événement) . 133
Inégalité
  de Bernstein 328
  de Bienaymé-Tchebychev . . 157, 253, **327**
    d'ordre k 327
  de Boole 87, *97*
  de Cauchy-Schwarz 156, 249, 321, 334, 657
  de Fatou 124
  de Hölder 166
  de Jensen 328
  de Kolmogorov 620
  de Lyapounov 329
  de Markov **326**
    pour une v.a. à densité 253
    pour une v.a. discrète *166*
  des remontées de Doob 486
  triangulaire 640
inf 79
Inspection (paradoxe de l'—) 72, 579
Intégrable (v.a. —) 311
Intégrale
  gaussienne 686
  de Paley-Wiener-Zygmund *609*
  selon une mesure de probabilité 308–314
Intégration terme à terme 316

Intervalle
de confiance . . . 463
de fluctuation . . . 463
Itéré (loi du logarithme —) . . . 444

J

Jacobi (symbole de —) . . . 538
Jacobien . . . 656
Jensen (inégalités de —) . . . 328
Jeu non transitif . . . 631
Joker . . . [H43]
Jumeaux (entiers « premiers »—) . . . *547*

K

Kac (théorème d'Erdős- —) . . . 551
KAKUTANI Shizuo . . . 601
Khintchine (théorème de —) . . . 424
Kolmogorov
axiomes de — . . . 84
équation de Chapman- — . . . 586
inégalité de — . . . 620
loi des grands nombres de — . . **425**, 426
loi du tout ou rien de — . . . 419
test de — -Smirnov . . . 430
théorème d'extension . . . 682
König-Huygens (théorème de —) . . . 154, 248, **314**
Kurtosis . . . 252

L

$\mathcal{L}^0$ ou $\mathcal{L}^0(\Omega)$ . . . 291
$\mathcal{L}^0_b(\Omega)$ . . . 291
$\mathcal{L}^0_+(\Omega)$ . . . 291
L^1 . . . 313
$\mathcal{L}^1$ . . . [H71], 311
L^2 . . . 321
$\mathcal{L}^2$ . . . 321
L^p . . . 323
Lachesis . . . [H34]
Lagrange (multiplicateurs de —) . . . 657
Laplace
— -Gauss (loi de —) . . . 231
théorème de de Moivre- — . . . 449
$\mathcal{L}^p$ . . . 314
Lebesgue
décomposition de — . . . 298, 648
mesure de — sur $[0;1]$ . . . 92
tribu de — . . . 88
LEEUWENHOEK Antoni . . . 582
Lemme
d'Abel . . . 654
de Borel-Cantelli . . . 117
de classe monotone . . . 671, **672**
des coalitions
cas à densité . . . 265
cas discret . . . 179
(démonstration) . . . 674
pour des tribus . . . 343, **673**
pour des v.a. . . . **344**, **673**
de Doob-Dynkin . . . 478, 669
de factorisation . . . 478, 669
de Fatou . . . 315
des moments . . . 379
Lévy (théorème de —) . . . 362, **401**
lim inf et lim sup . . . 114
lim ↑, lim ↓ . . . 80
Limite
inférieure/supérieure . . . 114
d'une suite de parties . . . 116
d'une suite monotone de parties . . . 80
théorème — central . . . **438**, 443
Logarithme (loi du — itéré) . . . 444
Loi . . . [H56], **294**
a priori/*a posteriori* . . . 273
de l'Arc sinus . . . 617
bêta $B(a,b)$ . . . 235
de Benford . . . 544
de Bernoulli . . . 133
binomiale . . . 134
approximation normale . . . 449
approximation par Poisson . . . 448
calcul de l'espérance . . . 149
de Cauchy . . . 234
somme de variables de — . . . *363*
conditionnelle
cas à densité . . . 271
cas discret . . . 175, 189
conjointe
cas à densité . . . 257
cas discret . . . 174
convergence en — . . . 393, 395
diffuse . . . 224
du tout ou rien
de Hewitt-Savage . . . 420
de Kolmogorov . . . 419
exponentielle . . . [H62], 230
lien avec la loi de Poisson . . . 241, 512
simulation . . . 513
somme de deux v.a. . . . *279*
faible des grands nombres . . . 211, **424**
de Khintchine . . . 424
forte des grands nombres . . 212, **425**, 426
(démonstration de Cantelli) . . . 434
(démonstration de Pratelli) . . . 432
Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$ . . . 235, *279*
gamma $\gamma(\nu)$ . . . 235
simulation . . . 517, *528*
gaussienne . . . voir Loi normale
géométrique . . . 134
simulation . . . 511
de Gumbel . . . 165
hypergéométrique . . . 139
du χ^2 . . . 235
du logarithme itéré . . . 444
marginale
cas à densité . . . 258, 335
cas discret . . . 174, 175
normale . . . **231**
quotient de deux v.a. . . . 266
simulation . . . 518
somme de deux v.a. . . . 266
des petits nombres . . . 137
de Poisson . . . 136
approximation normale . . . 451
lien avec l'exponentielle . . . 241, 512
mode d'une — . . . *141*
simulation . . . 512
du premier succès . . . 134
de Rayleigh . . . 519
sans mémoire . . . 136, 230
uniforme
à densité . . . 229
discrète . . . 133
d'une variable aléatoire . . . **294**
Lyapounov (inégalités de —) . . . 329

M

Marche aléatoire
discrète . . . 582
limite continue . . . 583, 584
Marginale
— s d'un couple . . . 175, 258
densité — . . . 261, 335
loi —
cas à densité . . . 258, 335

cas discret 174, 175
Markov
chaîne de — *199*
inégalité de — **326**
pour une v.a. à densité 253
pour une v.a. discrète *166*
processus de — 597
Martingale 482, **483**
Masse de Dirac 84, **93**
Matching problem 149
Maternité (nuits agitées à la —) *464*
Matrice
aléatoire *339*, 555
de covariance 333
changement de base 334
jacobienne 656
symétrique définie positive 664
symétrique positive 664
Maximum
de variables aléatoires *267*, *279*, *280*, *329*
de vraisemblance 615
Maxwell James Clerk 560
Maxwell-Boltzmann (distrib. de —) . . . 64, 565
Médiane d'une v.a. à densité 228
Mémoire (loi sans —) 136, 230
Menteurs (la chaîne des —) *50*
Mesurable
espace — 82
fonction — . . . . . [H58], 291, 668
selon une partition 475
selon une tribu 478, 669
un ensemble non — 95
Mesure
σ-finie 675
absolument continue 675
de Dirac 84, **93**
de Lebesgue sur $[0;1]$ 92
produit 332
de Wiener 593
Méthode
de Box-Muller 519
de Box-Muller avec rejet 520
de Monte-Carlo . . . . . voir Monte-Carlo
du rejet 427, **514**, 536
Métro (temps d'attente du —) 274
Middle-square (algorithme —) 524, *528*
Mixte (variable aléatoire —) 296
Mode *141*
Modèle de Cramér 542
Moment **313**
centré
d'une variable à densité 247
d'une variable discrète 152
d'une variable à densité 247
factoriel *166*
lemme des —s 379
Monotone
classe — 671
engendrée 672
lemme de classe — 672
théorème de convergence — 315
(démonstration) 329
Monte-Carlo (méthode de —) **531**
pour calculer une intégrale 534
pour estimer une moyenne 532
pour le problème de Dirichlet 600
pour la primalité 538
pour effectuer un tri 543
Morgan (règles de de —) 38
Mouvement brownien
construction canonique 594
covariance 595
définition 591
existence 592
loi (mesure de Wiener) 593
Moyenne empirique 460
Multiplicateurs de Lagrange 657
Multivariée (distribution normale —) 374
Mutuellement indépendants (évts. —) 113

N

$\mathscr{N}(m\,;\,\sigma^2)$ 231
Needham John Turberville 582
Négligeable . . . . . [H38], **87**
Nikodým (théorème de Radon- —) 675
Nombre
de Champernowne 219
normal 218, 498
—s de Stirling 161, **661**
Normal (nombre —) 218, 498
Normale (loi —) **231**
quotient de deux v.a. 266
simulation 518
somme de deux v.a. 266
Norme 663
Nornes . . . . . [H34]

O

O, o 639
Ordre (statistique d'—) *339*
Orthogonal (endomorphisme —) 664
Orthonormée (famille — de L^2) 325
Ouvert 663

P

$\mathscr{P}(\lambda)$ 136
Paley-Wiener-Zygmund (intégrale de —) . *609*
Paradoxe
des anniversaires *50*
de Galton 632
de Gibbs 566
des grenouilles *279*
de l'inspection *72*, *579*
de Saint-Pétersbourg 628
téléphonique *339*
Parseval (égalité de —) 658
Partie
fermée 663
ouverte 663
positive/négative 147, **310**
singulière 297, 648
Perrin Jean 600
Petits nombres (loi des —) 137
π-système 671
— et indépendance 673
Poincaré (formule de —) 89
Points d'un processus 574
Poisson
loi de — 136
approximation normale 451
lien avec l'exponentielle 241, 512
modes d'une — *141*
simulation 512
processus de — 574
Pólya (théorème de récurrence) 597
Polynômes de Bernstein 502
Pratelli (Luca —) 432
Presque sûr . . . . . [H38], 87
convergence presque sûre 385
Presque sûrement . . . . . [H38]
$(X_n)_{n\geqslant 1} \to X$ p.s. 385
Primalité (tests probabilistes de —) 538
Probabilisable (espace —) 82

Probabilité **84**
—s composées (th. des —) . . . . [H48], 103
conditionnelle . . . . [H47], **102**
sachant une partition 487
sachant une v.a. discrète 488
convergence en — 388
image . . . . [H57], 294
produit 332, 668
—s totales (formule des —) . . . [H47], 103
Problème
des chapeaux (des conjoints) 149
du collectionneur 150, **162**
de Dirichlet 600
Processus
de branchement 195
de comptage 574
de Galton-Watson 195
markovien 597
de Poisson 574
stochastique 574
Produit
de Cauchy 654
direct/tensoriel 263
probabilité — 332, 668
tribu — 332, 667
Programme (en environnement instable) . *352*
Projection orthogonale 657
Pseudo-inverse d'une fonction croissante . . 649

Q

Quadratique (risque —) 462
Quasi-complet (système —) 88
Queue (événement de —) 417
Quotient de deux v.a. normales 266

R

Rademacher
fonctions de — 216
suite de — 205
Radial (lemme de continuité —e d'Abel) . 654
Radon (théorème de — -Nikodým) 675
Rang d'un cylindre 204
Rayleigh (loi de —) 519
Rayon d'une série entière 653
aléatoire 621
Réalisation (théorème de —) 679
Réarrangement *339*
Réciproque (image — d'une partie) . [H58], 292
Recuit simulé 543
Récurrent
(mouvement brownien) 597
événement — 208
Réduite (variable —) 155, 252
Régénératif (événement —) 207
Règles de de Morgan 38
Régression (droite de —) 456
Rejet (méthode du —) 427, 514
Remontées (inégalité des —) 486
Répartition
fonction de — . . . . [H58], 130, **294**
d'un couple à densité 257
empirique 428
d'une probabilité sur $\mathbb{R}$ 90
Résultat d'une expérience . . . . [H34]
Riemann
fonction ζ de — 556
hypothèse de — 556
Riesz-Fisher (théorème de —) 323
Risque quadratique 462
Rosencrantz & Guildenstern 27

S

Saint-Pétersbourg (paradoxe de —) 628
Saut de discontinuité 647
Schauder (fonctions de —) 598
Séparable (tribu —) 88
Séquence
homogène 205
de trois *face* *50*
Série
aléatoire 421, 619
de Bertrand 639
entière 653
aléatoire 499, 621
harmonique 639
de variables positives 315
Simple (convergence —) 652
Simple (variable aléatoire —) 127, 302
espérance 308
Simulation
d'une loi continue 513
d'une loi exponentielle 513
d'une loi $\gamma(a)$ 517
d'un vecteur gaussien 521
d'une loi géométrique 511
d'une loi normale 518
d'une loi de Poisson 512
Singe 4, 117
Singulière
fonction — 297, 648
partie — 297, 648
Skorokhod (th. de représentation de —) . . 410
Slutsky (théorème de —) **402**, 463
Smirnov (test de Kolmogorov- —) 430
SMOLUCHOWSKI Marian 600
Sommable (famille —) 642
Somme de deux variables
à valeurs dans $\mathbb{Z}$ 176
binomiales 183
à densité 261
à densité indépendantes 265
discrètes indépendantes 182
exponentielles *279*
normales 266
de Poisson 183
Sondage *51*, *465*
Sous-additivité 85, *97*
dénombrable 87
Sous-martingale 484
Sous-tribu 79
Spectral (théorème —) 664
Stabilité
de la loi binomiale 183
de la loi normale 266
de la loi de Poisson 183
Stationnaires (accroissements —) 575
Statistique d'ordre *339*
Steinhaus (théorème de —) 499
Stieltjes (intégrale de —) 301
Stirling
formule de — 639
preuve probabiliste 497
nombres de — 161, **661**
Stratégie
pour gagner à *pile-face* 350
pour gagner un trésor *632*
Succès 133
loi du premier — 134
Suite
de Cauchy 638
équidistribuée 405
de Rademacher 205
uniformément distribuée 405
sup 79

Sur-martingale ... 484
Symétrique
  événement — ... 420
  matrice — (définie) positive ... 664
  variable aléatoire — ... 229, 247
Système
  complet d'événements ... 88
    induit par X ... 128
  quasi-complet d'événements ... 88
  total ... 658

T

Tchebychev (inégalité de —) ... 157, 253, **327**
  d'ordre k ... 327
Temps d'arrêt ... 350
Temps d'attente
  au feu tricolore ... *296*, *355*
  au rendez-vous ... *279*
Test
  fonction-test ... 659
  de Kolmogorov-Smirnov ... 430
  de primalité ... 538
Théorème
  de Bayes ... 104, 105
    version continue ... 273
  de Bernstein ... 502
  de Carathéodory ... 94, **675**
  central limit ... **438**, 443
  de Chapman-Kolmogorov ... 586
  de continuité
    (fonctions caractéristiques) ... 362
    (fonctions caractéristiques) ... **401**
    (fonctions génératrices) ... 398
  de convergence dominée ... 316, *412*
  de convergence dominée discret 165, 644
  de convergence monotone ... 315
    (démonstration) ... 329
  de convolution ... 265, **349**
  de de Moivre-Laplace ... 449
  de décomposition de Lebesgue .. 298, 648
  de Dini ... 652
  de Dirichlet ... 641
  d'Erdős-Kac ... 551
  d'extension de Kolmogorov ... 682
  de Fubini
    cas général ... 335, 655
    pour les séries doubles . 642, 643, *664*
  de Glivenko-Cantelli ... 429
  de Heine ... 644
  d'intégration terme à terme ... 316
  de Khintchine ... 424
  de Kolmogorov ... 682
  de König-Huygens ... 154, 248, **314**
  de Lévy ... 362, **401**
  limite central ... **438**, 443
  des probabilités composées ... [H48], 103
  de Radon-Nikodým ... 675
  de réalisation ... 679
  de récurrence de Pólya ... 597
  de Riesz-Fisher ... 323
  de représentation de Skorokhod ... 410
  de Slutsky ... **402**, 463
  spectral ... 664
  de Steinhaus ... 499
  de transfert ... **318**
    pour un couple à densité ... 263
    pour un couple discret ... 176
    pour une variable discrète ... 151
    pour une variable à densité .. 246, 320
  de Weierstrass ... 501, 653
  de Wick ... 379
Total
  formule de l'espérance —e ... 190
  formule des probabilités —es .. [H47], 103
  système — ... 658
Tour (*tower property*) ... 475
Tout ou rien (loi du — de Kolmogorov) 419, 420
Transfert (théorème de —) ... **318**
  pour un couple à densité ... 263
  pour un couple discret ... 176
  pour une variable à densité ... 246, 320
  pour une variable discrète ... 151
Transient
  (mouvement brownien) ... 597
  événement — ... 208
Transitif
  dés non —s ... *632*
  jeu non — ... 631
Tri (méthode de — rapide randomisé) ... 543
Triangulaire (inégalité —) ... 640
Tribu ... **79**
  asymptotique ... 417
  complète ... 87
  discrète ... 79
  engendrée ... 81
  engendrée par plusieurs v.a. ... 418
  engendrée par une v.a. ... 341, 669
  grossière ... 79
  de Lebesgue ... 88
  produit ... 332, 667
  de queue ... 417
  sans atomes ... *96*
  séparable ... 88
  sous- — ... 79
  sur $\mathbb{C}$ ... 357
  triviale ... 79
Trois *face* d'affilée ... *50*
Tronquée (variable —) ... 296

U

$\mathscr{U}\big([\,a\,;\,b\,]\big)$ ... 229
$\mathscr{U}\big([\![a\,;\,b]\!]\big)$ ... 133
Uniforme
  convergence — ... 652
  loi — à densité ... 229
  loi — discrète ... 133
Uniformément
  continue (fonction —) ... 644
  distribuées (suites —) ... 405
Univers ... [H34], **82**
  — -image ... 127

V

Vandermonde (formule de —) ... 140, 661
Variable aléatoire ... [H56], 291
  absolument continue ... 224
  centrée ... 155, 252
  complexe ... 311, **357**
  continue ... 224
  —s décorrélées ... 184
  à densité ... [H62], 224
    espérance ... [H72], **245**
  déterministe ... **33**, 352
  discrète ... [H61], **127**
    espérance ... [H71], **143**
  espérance
    définition alternative ... 300, 301
    définition générale ... **311**
  gaussienne ... 366
  —s indépendantes ... 341
  intégrable ... 309
  mixte ... 296
  réduite ... 155, 252

simple 127, 302
espérance 308
symétrique 229, 247
tronquée 296
Variance **314**
d'une v.a. à densité 248
d'une v.a. discrète 153
Variation bornée (fonction à —) 644
Vecteur
aléatoire 331
gaussien 374
simulation 521
Version
de l'espérance conditionnelle 472
de la probabilité conditionnelle . 488, 489
Vieillissement (propriété de non —) . . 136, 230
Vitali (contre-exemple de —) 95
Voisinage 663
von Mises (paradoxe des anniversaires) *50*
Vraisemblance (maximum de —) 615

W

Wald (identités de —) 193, 351
Weierstrass (théorème de —) 501, 653
Weyl (critère de —) 405
Wick (théorème de —) 379
WIENER Norbert 593
Wiener (mesure de —) 593

Z

Zéro-un (loi du — de Kolmogorov) 419
Zeta (fonction — de Riemann) 556

Mis en page avec $\LaTeX\,2_\varepsilon$ sous Linux

Figures réalisées avec TikZ,
Python, Scilab et Xfig